



I. P. N.  
C. E. C. y T. "Miguel Othón de Mendizábal"

## CÁLCULO DIFERENCIAL



Academia de Matemáticas

2013

Nombre del Alumno (a): .....

Grupo: ..... Boleta: ..... Firma: .....

Nombre del Profesor (a): .....

FOLIO:

## INDICE

- Programa de cálculo diferencial	3
- Introducción. El cálculo como matemática de la variación.	4
- Funciones	4
- Álgebra de funciones	6
- Aplicación de las funciones	9
- Dominio y rango	12
- Límites	13
- Asíntotas de una función	16
- Continuidad de una función	17
- La derivada de una función, por definición	20
- Derivadas de funciones algebraicas	21
- Derivadas de funciones algebraicas, definidas implícitamente	22
- Aplicaciones de la derivada	23
- Derivadas de funciones trascendentales	27
- Graficación de funciones polinomiales	34
- Optimización de funciones	35
- Soluciones gráficas	37
- Precálculo	47
- Formulario de cálculo diferencial	60
- Bibliografía	62



## PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL

### **COMPETENCIA GENERAL:**

Resuelve problemas relacionados con la variación de funciones, a partir del concepto de derivada, en situaciones teóricas y reales de su entorno académico, social y global.

### **COMPETENCIA PARTICULAR 1**

Resuelve problemas de funciones, en el campo de los números reales, que involucren los conceptos de límite y continuidad en situaciones relacionadas en su entorno académico.

#### RAP 1

Establece el comportamiento de las funciones, a través de su gráfica y sus operaciones.

#### RAP 2

Emplea la definición y teoremas de límites en la continuidad y discontinuidad de funciones.

#### RAP 3

Utiliza funciones y teoremas de límites en la resolución de problemas de su entorno académico.

### **COMPETENCIA PARTICULAR 2**

Resuelve problemas referentes a la derivada de funciones algebraicas en situaciones de su entorno académico, social y global.

#### RAP 1

Obtiene derivadas de funciones algebraicas a partir de su definición y el uso del formulario, en situaciones académicas.

#### RAP 2

Aplica la derivada en situaciones geométricas y físicas, en la resolución de problemas, de su entorno académico.

#### RAP 3

Resuelve problemas de optimización que involucren funciones algebraicas, en situaciones académicas, sociales y globales.

### **COMPETENCIA PARTICULAR 3**

Resuelve problemas referentes a la derivada de funciones trascendentales y el uso de la diferencial, en situaciones de su entorno académico.

#### RAP 1

Obtiene derivadas de funciones trascendentales, a partir de la definición de derivada y el uso del formulario, en situaciones académicas.

#### RAP 2

Resuelve problemas de optimización con funciones trascendentales, en situaciones académicas.

#### RAP 3

Resuelve problemas con el uso de la diferencial, en el entorno académico.



# INTRODUCCIÓN. EL CÁLCULO COMO MATEMÁTICA DE LA VARIACIÓN.

El Cálculo se origina a partir de la necesidad de proponer modelos matemáticos para analizar y resolver problemas donde el cambio está presente, problemas de movimiento o de carácter estático enfocados desde un punto de vista dinámico. En este sentido, tanto Newton mediante el estudio de las "fluxiones" como Leibniz a través del "estudio de las tangentes", descubren el Cálculo Diferencial.

El cálculo estudia la variabilidad, sustentada en la rapidez con la que se da este cambio en situaciones geométricas, físicas, etc., donde las funciones que representan a éstas son *real-valoradas* (funciones de una variable) y la medida en la que influye la variación de una variable que a su vez está relacionada con la variabilidad de otra a través una tercer variable.

## FUNCIONES

Obtén los valores de las variables independientes (argumento) y variables dependientes (imagen), según sea el caso en las siguientes funciones:

1. Si  $f(x) = -4$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ ; c)  $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; d)  $f(x) = -4$ .

R: a)  $(0, -4)$ . b)  $\left(-\frac{5}{3}, -4\right)$ . c)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -4\right)$ . d)  $\square$ .

2. Si  $f(x) = \frac{5}{3}x - 2$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f(-\sqrt{5})$ ; c)  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ; d)  $f(x) = \sqrt{7}$ ; e)  $f(x) = 0$ ; f)  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

R: a)  $(0, -2)$ . b)  $\left(-\sqrt{5}, -\frac{5\sqrt{5}+6}{3}\right)$ . c)  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{13}{9}\right)$ . d)  $\left(\frac{3\sqrt{7}+6}{5}, \sqrt{7}\right)$ . e)  $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ . f)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

3. Si  $f(y) = 3 - 2y$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; c)  $f(\sqrt{3})$ ; d)  $f(y) = 0$ ; e)  $f(y) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ; f)  $f(y) = \frac{4}{3}$ .

R: a)  $(0, 3)$ . b)  $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ . c)  $(\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$ . d)  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ . e)  $\left(\frac{9 - \sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ . f)  $\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$ .

4. Si  $f(r) = r^2 + 4r$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ; c)  $f(\sqrt{5})$ ; d)  $f(r) = 0$ ; e)  $f(r) = 3$ ; f)  $f(r) = -5$ .

R: a)  $(0, 0)$ . b)  $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{20}{9}\right)$ . c)  $(\sqrt{5}, 5 + 4\sqrt{5})$ . d)  $(0, 0), (-4, 0)$ . e)  $(-2 + \sqrt{7}, 3), (-2 - \sqrt{7}, 3)$ . f) *No def.*

5. Si  $f(\phi) = 6 - 4\phi + \phi^2$ , obtén: a)  $f(\sqrt{2})$ ; b)  $f(0)$ ; c)  $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ; d)  $f(\phi) = 0$ ; e)  $f(\phi) = 5$ ; f)  $f(\phi) = \frac{13}{2}$ .

R: a)  $(\sqrt{2}, 8 - 4\sqrt{2})$ . b)  $(0, 6)$ . c)  $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ . d) *No def.* e)  $(2 + \sqrt{3}, 5), (2 - \sqrt{3}, 5)$ . f)  $\left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{13}{2}\right), \left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{13}{2}\right)$ .

6. Si  $f(\gamma) = -\sqrt{\gamma^2 + 4}$ , obtén: a)  $f(-\sqrt{5})$ ; b)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(\gamma) = 0$ ; e)  $f(\gamma) = \frac{3}{7}$ ; f)  $f(\gamma) = -\sqrt{5}$ .

R: a)  $(-\sqrt{5}, -3)$ . b)  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ . c)  $(0, -2)$ . d) *No def.* e) *No def.* f)  $(-1, -\sqrt{5}), (1, -\sqrt{5})$ .



7. Si  $f(s) = \sqrt{7-s}$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f(10)$ ; c)  $f(-9)$ ; d)  $f(s) = 0$ ; e)  $f(s) = -2$ ; f)  $f(s) = \sqrt{5}$ .  
R: a)  $(0, \sqrt{7})$ . b) *No def.* c)  $(-9, 4)$ . d)  $(7, 0)$ . e) *No def.* f)  $(2, \sqrt{5})$ .
8. Si  $f(z) = -\frac{3+z}{z-2}$ , obtén: a)  $f(2)$ ; b)  $f\left(\frac{5}{4}\right)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(z) = 0$ ; e)  $f(z) = -\frac{1}{2}$ ; f)  $f(z) = 1$ .  
R: a) *No def.* b)  $\left(\frac{5}{4}, \frac{17}{3}\right)$ . c)  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ . d)  $(-3, 0)$ . e)  $\left(-8, -\frac{1}{2}\right)$ . f)  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ .
9. Si  $f(y) = \frac{y^2-4}{y-2}$ , obtén: a)  $f(-\sqrt{5})$ ; b)  $f(2)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(y) = 0$ ; e)  $f(y) = 4$ ; f)  $f(y) = -\frac{1}{3}$ .  
R: a)  $(-\sqrt{5}, 2-\sqrt{5})$ . b) *No def.* c)  $(0, 2)$ . d)  $(-2, 0)$ . e) *No def.* f)  $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{1}{3}\right)$ .
10. Si  $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 5 \\ 3x & x > 5 \end{cases}$ , obtén: a)  $f(0)$ ; b)  $f(6)$ ; c)  $f(-3)$ ; d)  $f(x) = -4$ ; e)  $f(x) = 0$ ; f)  $f(x) = 20$ .  
R: a)  $(0, 2)$ ; b)  $(6, 18)$ ; c)  $(-3, 5)$ ; d) *No def.*; e)  $(2, 0)$ ; f)  $(-18, 20)$ ,  $\left(\frac{20}{3}, 20\right)$ .
11. Si  $f(x) = \begin{cases} x^2-x-6 & x < 3 \\ 4-x^2 & x > 3 \end{cases}$ , obtén: a)  $f(3)$ ; b)  $f(5)$ ; c)  $f(2)$ ; d)  $f(x) = -6$ ; e)  $f(x) = 0$ ; f)  $f(x) = 2$ .  
R: a) *No def.* b)  $(5, -21)$ . c)  $(-4, 2)$ . d)  $(0, -6)$ ,  $(1, -6)$ ,  $(\sqrt{10}, -6)$ . e)  $(2, 0)$ . f)  $\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2}, 5\right)$ .
12. Si  $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2-4} & x \leq -2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2 < x < 2 \\ -\sqrt{x^2+4} & x \geq 2 \end{cases}$ , obtén: a)  $f(-4)$ ; b)  $f(0)$ ; c)  $f(5)$ ; d)  $f(x) = -4$ ; e)  $f(x) = 5$ ; f)  $f(x) = 1$ .  
R: a)  $(-4, -\sqrt{12})$ . b)  $(0, 2)$ . c)  $(5, -\sqrt{29})$ . d)  $(-\sqrt{20}, -4)$ ,  $(\sqrt{12}, -4)$ . e) *No def.* f)  $(-\sqrt{3}, 1)$ ,  $(\sqrt{3}, 1)$ .
13. Si  $f(x) = e^{3x}$ , obtén: a)  $f(\ln 3)$ ; b)  $f\left(\frac{2}{3}\right)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(x) = 0$ ; e)  $f(x) = -3$ ; f)  $f(x) = e$ .  
R: a)  $(\ln 3, 27)$ . b)  $\left(\frac{2}{3}, e^2\right)$ . c)  $(0, 1)$ . d) *No def.* e) *No def.* f)  $\left(\frac{1}{3}, e\right)$ .
14. Si  $f(\varphi) = 5^{1-\varphi}$ , obtén: a)  $f(1)$ ; b)  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(\varphi) = 0$ ; e)  $f(\varphi) = 25$ ; f)  $f(\varphi) = \frac{1}{5}$ .  
R: a)  $(1, 1)$ . b)  $\left(-\frac{1}{2}, 5\sqrt{5}\right)$ . c)  $(0, 5)$ . d) *No def.* e)  $(-1, 25)$ . f)  $\left(2, \frac{1}{5}\right)$ .
15. Si  $f(r) = \ln(2-5r)$ , obtén: a)  $f\left(-\frac{7}{5}\right)$ ; b)  $f(1)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(r) = 0$ ; e)  $f(r) = -5$ ; f)  $f(r) = 3$ .  
R: a)  $\left(-\frac{7}{5}, 2\ln 3\right)$ . b) *No def.* c)  $(0, \ln 2)$ . d)  $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ . e)  $\left(-\frac{1-2e^5}{5e^5}, -5\right)$ . f)  $\left(\frac{2-e^3}{5}, 3\right)$ .



16. Si  $f(s) = \log(s^2 - 4)$ , obtén: a)  $f(-3)$ ; b)  $f(\sqrt{7})$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(s) = 0$ ; e)  $f(s) = \frac{1}{2}$ ; f)  $f(s) = -1$ .

R: a)  $(-3, \log 5)$ . b)  $(\sqrt{7}, \log 3)$ . c) No def. d)  $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ . e)  $(\sqrt{4 + \sqrt{10}}, \frac{1}{2}), (-\sqrt{4 + \sqrt{10}}, \frac{1}{2})$ . f)  $(\frac{\sqrt{410}}{10}, -1), (-\frac{\sqrt{410}}{10}, -1)$ .

17. Si  $f(\theta) = \cos 3\theta$ , obtén: a)  $f(\frac{\pi}{3})$ ; b)  $f(\frac{\pi}{4})$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(\theta) = 0$ ; e)  $f(\theta) = 2$ ; f)  $f(\theta) = -\frac{1}{2}$ ;  $\theta$  en radianes y

en el intervalo de  $0 \leq \theta \leq \pi$ . R: a)  $(\frac{\pi}{3}, -1)$ . b)  $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ . c)  $(0, 1)$ . d)  $(\frac{\pi}{6}, 0)$ . e) No def. f)  $(\frac{2\pi}{9}, -\frac{1}{2})$ .

18. Si  $f(\varphi) = \csc(\frac{\varphi}{2})$ , obtén: a)  $f(\frac{\pi}{3})$ ; b)  $f(\pi)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(\varphi) = 0$ ; e)  $f(\varphi) = \sqrt{2}$ ; f)  $f(\varphi) = 2$ ;  $\varphi$  en radianes

y en el intervalo de  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . R: a)  $(\frac{\pi}{3}, 2)$ . b)  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ . c)  $(0, \infty)$ . d) No def. e)  $(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2})$ . f)  $(\frac{\pi}{3}, 2)$ .

19. Si  $f(y) = \arcsen(2y)$ , obtén: a)  $f(\frac{1}{2})$ ; b)  $f(1)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(y) = 0$ ; e)  $f(y) = \frac{\pi}{4}$ ; f)  $f(y) = -\frac{\pi}{6}$ .

R: a)  $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ . b) No def. c)  $(0, 0)$ . d)  $(0, 0)$ . e)  $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi}{4})$ . f)  $(-\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{6})$ .

20. Si  $f(x) = \arctan(x+1)$ , obtén: a)  $f(\sqrt{3}-1)$ ; b)  $f(-1)$ ; c)  $f(0)$ ; d)  $f(x) = 0$ ; e)  $f(x) = \frac{2}{3}\pi$ ; f)  $f(x) = \frac{\pi}{6}$ .

R: a)  $(\sqrt{3}-1, \frac{\pi}{3})$ . b)  $(-1, 0)$ . c)  $(0, \frac{\pi}{4})$ . d)  $(-1, 0)$ . e)  $(-\sqrt{3}-1, \frac{2\pi}{3})$ . f)  $(\frac{\sqrt{3}-1}{3}, \frac{\pi}{3})$ .

## ALGEBRA DE FUNCIONES

A) Para la función, cuya expresión analítica es:  $f(x) = 6 - 4x - x^2$ , calcula:

1.  $f(x) + 4$ . R:  $10 - 4x - x^2$ . 2.  $f(x) + f(4)$ . R:  $-20 - 4x - x^2$ .

3.  $f(x+4)$ . R:  $-26 - 12x - x^2$ . 4.  $f(x) - 6$ . R:  $-4x - x^2$ .

5.  $f(x-6)$ . R:  $-6 - 4x - x^2$ . 6.  $f(x) - f(6)$ . R:  $60 - 4x - x^2$ .

7.  $6 - f(x)$ . R:  $4x + x^2$ . 8.  $f(6-x)$ . R:  $16x - x^2 - 54$ .

9.  $f(6) - f(x)$ . R:  $4x + x^2 - 60$ . 10.  $4f(x)$ . R:  $24 - 16x - 4x^2$ .

11.  $f(4x)$ . R:  $6 - 16x - 16x^2$ . 12.  $f(4)f(x)$ . R:  $-156 + 104x + 26x^2$ .

13.  $\frac{f(x)}{4}$ . R:  $\frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{4}$ . 14.  $f(\frac{x}{4})$ . R:  $6 - x - \frac{x^2}{16}$ .

15.  $\frac{f(x)}{f(4)}$ . R:  $-\frac{3}{13} - \frac{2x}{13} - \frac{x^2}{26}$ . 16.  $\frac{4}{f(x)}$ . R:  $\frac{4}{6 - 4x - x^2}$ .

17.  $f(\frac{4}{x})$ . R:  $6 - \frac{16}{x} - \frac{16}{x^2}$ . 18.  $\frac{f(4)}{f(x)}$ . R:  $-\frac{26}{6 - 4x - x^2}$ .

19.  $-f(4)$ . R: 26. 20.  $f(-4)$ . R: 6.



21.  $f(x^2)$ .

R:  $6 - 4x^2 - x^4$ .

22.  $[f(x)]^2$ .

R:  $x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 48x + 36$ .

23.  $\sqrt{f(x)}$ .

R:  $\sqrt{6 - 4x - x^2}$ .

24.  $f(\sqrt{x})$ .

R:  $6 - 4\sqrt{x} - x$ .

B) Para las funciones propuestas en cada ejercicio, obtén: a)  $f + g$ ; b)  $f - g$ ; c)  $g - f$ ; d)  $f \square g$ ; e)  $\frac{f}{g}$ ; f)  $\frac{g}{f}$ ; g)  $f \circ g$ ; h)  $g \circ f$ .

1.  $f(x) = 2x + 1$ ;  $g(x) = 8 - 4x$ .

R: a)  $9 - 2x$ . b)  $6x - 7$ . c)  $7 - 6x$ . d)  $12 + 8 - 8x^2$ . e)  $\frac{2x+1}{8-4x}$ . f)  $\frac{8-4x}{2x+1}$ . g)  $17 - 8x$ . h)  $4 - 8x$ .

2.  $f(\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi+1}$ ;  $g(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$ .

R: a)  $\frac{\varphi^2 + \varphi + 1}{\varphi^2 + \varphi}$ . b)  $\frac{\varphi^2 - \varphi - 1}{\varphi^2 + \varphi}$ . c)  $\frac{\varphi + 1 - \varphi^2}{\varphi^2 + \varphi}$ . d)  $\frac{1}{\varphi^2 + \varphi}$ . e)  $\frac{\varphi^2}{\varphi + 1}$ . f)  $\frac{\varphi + 1}{\varphi^2}$ . g)  $\frac{1}{1 + \varphi}$ . h)  $\frac{\varphi + 1}{\varphi}$ .

3.  $f(\phi) = \sqrt{\phi + 3}$ ;  $g(\phi) = \sqrt{\phi - 1}$ .

R: a)  $\sqrt{\phi + 3} + \sqrt{\phi - 1}$ . b)  $\sqrt{\phi + 3} - \sqrt{\phi - 1}$ . c)  $\sqrt{\phi - 1} - \sqrt{\phi + 3}$ .

d)  $\sqrt{\phi^2 + 2\phi - 3}$ . e)  $\sqrt{\frac{\phi + 3}{\phi - 1}}$ . f)  $\sqrt{\frac{\phi - 1}{\phi + 3}}$ . g)  $\sqrt{\sqrt{\phi - 1} - 3}$ . h)  $\sqrt{\sqrt{\phi + 3} - 1}$ .

4.  $f(t) = t^2 + 3t$ ;  $g(t) = e^{t+2}$ .

R: a)  $t^2 + 3t + e^{t+2}$ . b)  $t^2 + 3t - e^{t+2}$ . c)  $e^{t+2} - t^2 - 3t$ .

d)  $t^2 e^{t+2} + 3t e^{t+2}$ . e)  $\frac{t^2 + 3t}{e^{t+2}}$ . f)  $\frac{e^{t+2}}{t^2 + 3t}$ . g)  $e^{2t+4} + 3e^{t+2}$ . h)  $e^{t^2+3t+2}$ .

5.  $f(\theta) = \sin \theta^2$ ;  $g(\theta) = \ln \sqrt{\theta}$ .

R: a)  $\sin \theta^2 + \ln \sqrt{\theta}$ . b)  $\sin \theta^2 - \ln \sqrt{\theta}$ . c)  $\ln \sqrt{\theta} - \sin \theta^2$ .

d)  $\sin \theta^2 \ln \sqrt{\theta}$ . e)  $\frac{\sin \theta^2}{\ln \sqrt{\theta}}$ . f)  $\frac{\ln \sqrt{\theta}}{\sin \theta^2}$ . g)  $\sin [\ln^2 \sqrt{\theta}]$ . h)  $\ln \sqrt{\sin \theta^2}$ .

6.  $f(s) = \ln(s^2 - 3s + 6)^4$ ;

R: a)  $\ln(s^2 - 3s + 6)^4 + e^{\sqrt{s}}$ . b)  $\ln(s^2 - 3s + 6)^4 - e^{\sqrt{s}}$ . c)  $e^{\sqrt{s}} - \ln(s^2 - 3s + 6)^4$ .

$$g(s) = e^{\sqrt{s}} \cdot e) \frac{\ln(s^2 - 3s + 6)^4}{e^{\sqrt{s}}} \cdot f) \frac{e^{\sqrt{s}}}{\ln(s^2 - 3s + 6)^4} \cdot g) \ln(e^{2\sqrt{s}} - 3e^{\sqrt{s}} + 6)^4 \cdot h) e^{\sqrt{\ln(s^2 - 3s + 6)^4}} \cdot d) e^{\sqrt{s}} \ln(s^2 - 3s + 6)^4$$

C) Expresa a la función  $h$  como la composición de las funciones  $f$  y  $g$  en dos formas diferentes.

1.  $h(x) = \sqrt{2x - x^2}$ .

R: a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2x - x^2$ . b)  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ ,  $g(x) = (x - 1)^2$ .

2.  $h(y) = \left(\frac{1}{y-2}\right)^3$ .

R: a)  $f(y) = \frac{1}{y^3}$ ,  $g(y) = y - 2$ . b)  $f(y) = y^3$ ,  $g(y) = \frac{1}{y-2}$ .

3.  $h(r) = 4 \sin(1 - r)$ .

R: a)  $f(r) = 4r$ ,  $g(r) = \sin(1 - r)$ . b)  $f(r) = 4 \sin r$ ,  $g(r) = 1 - r$ .

4.  $h(\theta) = \ln[\cos(2 - \theta)]$ .

R: a)  $f(\theta) = \ln \theta$ ,  $g(\theta) = \cos(2 - \theta)$ . b)  $f(\theta) = \ln[\cos \theta]$ ,  $g(\theta) = 2 - \theta$ .

5.  $h(t) = e^{\arctan^2 t}$ .

R: a)  $f(t) = e^{t^2}$ ,  $g(t) = \arctan t$ . b)  $f(t) = e^t$ ,  $g(t) = \arctan t^2$ .

6.  $h(z) = \arcsin[\ln(z^2 - 2)]$ .

R: a)  $f(z) = \arcsin z$ ,  $g(z) = \ln(z^2 - 2)$ . b)  $f(z) = \arcsin[\ln(z - 2)]$ ,  $g(z) = z^2$ .



D) Realiza los siguientes ejercicios.

1. Si  $g(x) = 1 + x^2$ ;  $h(x) = \frac{1}{x}$ , evalúa: a)  $g[h(2)]$ ; b)  $h[g(2)]$ ; c)  $g[g(2)]$ ; d)  $g[1+h(2)]$ ; e)  $1+g[h(2)]$ ; f)  $[1+g(2)]^2$ ; g)  $h\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
R: a)  $\frac{5}{4}$ . b)  $\frac{1}{5}$ . c) 26. d)  $\frac{13}{4}$ . e)  $\frac{9}{4}$ . f) 36. g)  $x$ .

2. Si  $f(y)$  está dada como:  $f(y) = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{10}{3}y - \frac{28}{3}$  comprueba que  $f(5+h) = f(5-h)$ .

R: La igualdad se cumple.

3. Si  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ , prueba que  $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$  y además, verifica:  $\varphi\left(\frac{ab}{b-a}\right) = \varphi(a) - \varphi(b)$ .

R: Las igualdades se cumplen.

4. Dada la función  $r(t) = \sqrt{t}$ , demuestra que  $\frac{r(a) - r(b)}{a - b} = \frac{1}{r(a) + r(b)}$  y  $\frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \frac{1}{r(t+h) + r(t)}$ .

R: Las igualdades se cumplen.

5. De acuerdo con la función  $t(r) = \frac{r-1}{r+1}$ , verifica que se cumplen las igualdades:  $t\left(\frac{1}{a}\right) + t(a) = 0$  y  $\frac{1}{t(a)} + t\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$ , para  $|a| \neq 1$ .

R: Las igualdades se cumplen.

6. Si  $h(x) = 8^x$ , demuestra que:  $h(a+b) = h(a)h(b)$ .

R: La igualdad se cumple.

7. Considera  $a(t) = 4^t$ , para verificar que:  $a(t+1) - a(t) = 3a(t)$ .

R: La igualdad se cumple.

8. Si  $m(\phi) = \log_b \sqrt{\phi}$ , con  $b > 0$  y  $b \neq 1$ , prueba que:  $m(b) + m\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ .

R: La igualdad se cumple.

9. Con la función  $n(\phi) = \log_a \frac{1}{\phi}$ , tal que  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , obtén: a)  $n(a^3)$ ; b)  $n(a)$ ; c)  $n\left(\frac{1}{a^5}\right)$ ; d)  $n(\sqrt{a})$ ; e)  $n\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)$ .  
R: a)  $\left(a^3, -\frac{3}{2}\right)$ . b)  $\left(a, -\frac{1}{2}\right)$ . c)  $\left(\frac{1}{a^5}, \frac{5}{2}\right)$ . d)  $\left(\sqrt{a}, -\frac{1}{4}\right)$ . e)  $\left(a^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}\right)$ .

10. Si  $f(x) = x^2 - x$ , prueba:  $f(a+1) = f(-a)$ .

R: La igualdad se cumple.

11. Sea  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ , determina: a)  $f(a+1)$ ; b)  $f(a-1)$ ; c)  $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ .

R: a)  $(a+1, a^2 + 4a + 2)$ . b)  $(a-1, a^2 - 2)$ . c)  $2x_0 + h + 2$ .

12. Determina  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  para cada una de las siguientes funciones: a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  para  $a \neq 2$ ,  $a+h \neq 2$ .

b)  $f(x) = \sqrt{x-4}$  para  $a \geq 4$ ,  $a+h \geq 4$ . c)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  para  $a \neq -1$ ,  $a+h \neq -1$ .

R: a)  $-\frac{1}{(a+h-2)(a-2)}$ . b)  $\frac{1}{\sqrt{a+h-4} - \sqrt{a-4}}$ . c)  $\frac{1}{(a+h+1)(a+1)}$ .



13. Sea  $l(y) = \log_a \left( \frac{1}{y} \right)$ , prueba que: a)  $l(a^3) = -3$ ; b)  $l\left(a^{-\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}$ . R: La igualdad se cumple para ambos incisos.

14. Sea  $h(s) = 4^s$ , demuestra que  $h(s+2) - h(s) = 15h(s)$ .

R: La igualdad se cumple.

15. Sea  $r(y) = \frac{1}{y^2}$ , determina  $\frac{r(y_0 + h) - r(y_0 - h)}{h}$ .

R:  $-\frac{4y_0}{(y_0^2 - h^2)}$ .

## APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES

1. De una hoja cuadrada de cartón de 40cm por lado, se construirá una caja sin tapa, recortando un cuadrado en cada una de las esquinas y luego doblando los bordes hacia arriba. Expresa el área  $A$  de la superficie total de la caja en función de la longitud  $x$  del lado del cuadrado recortado. R:  $A(x) = 1600 - 4x^2$ .

2. La longitud estimada (en centímetros) de un feto humano se determina con la función lineal  $L(t) = \frac{153}{100}t - \frac{67}{10}$  en donde  $t \geq 12$  semanas. R: a)  $f(36) = \frac{4838}{100} \text{ cm}$ . b)  $\Delta L(t) = \frac{153}{100} \text{ cm}$ . c)  $t = \frac{3115}{153} \text{ semanas}$ .

a) ¿Cuál es la longitud estimada de un feto de 36 semanas?

b) ¿Cuáles son los incrementos semanales de la longitud?

c) ¿Cuándo alcanza un feto la longitud de un pie (30.48cm)?

3. Se lanza hacia arriba una pelota desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de  $96 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ . La altura de la pelota medida desde el suelo se determina por la función cuadrática  $s(t) = 96t - 16t^2$ .

a) ¿En qué instante se encuentra la pelota a 80 ft del suelo?

b) ¿En qué instante se encuentra la pelota en el suelo?

c) ¿A qué altura llegará?

d) Traza la gráfica de  $s$  en el intervalo donde  $s(t) \geq 0$ , y grafica los puntos obtenidos en los incisos anteriores. R: a)  $t_1 = 1, t_2 = 5$ . b)  $t_0 = 0, t_f = 0$ . c)  $s_{\max}(t) = 144 \text{ ft}$ . d) Solución en la pág. 55.

4. En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada 3 horas, suponga que primero hay 100 bacterias. R: a)  $f(t) = 100 \left( 2^{\frac{t}{3}} \right)$ . b)  $f(15) = 3200 \text{ bacterias}$ . c)  $t = 6 \left( 1 + \frac{\ln 5}{\ln 2} \right) \text{ hrs}$ .

a) Obtenga una función que exprese el tamaño de la población después de  $t$  horas.

b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?

c) ¿En qué tiempo se tendrá una población de 10000 bacterias?

5. Un alambre de 24cm de largo se dobla en forma de rectángulo con ancho  $x$  y largo  $y$ . a) Expresa el ancho  $x$  en función del largo  $y$ . b) Expresa el área  $A$  del rectángulo como función de  $x$ .

R: a)  $x = 12 - y$ . b)  $A(x) = 12x - x^2$ .

6. El propietario de un rancho planea crear un potrero rectangular que se encuentra junto a un río. Ya tiene 100m de cerca y no es necesario cercar el lado que se encuentra a lo largo del río.

a) Escribe el área  $A$  del potrero en función de  $x$  que es la longitud del lado paralelo al río.

b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) Representa gráficamente la función  $A(x)$  y estima las dimensiones que produce la mayor cantidad de área para el potrero. R: a)  $A(x) = 50x - \frac{1}{2}x^2$ . b)  $D_f = (0, 100)$ ,  $0 < x < 100 \text{ m}$ . c) Solución en la pág. 55.



7. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, si una persona que pesa 150lb tiene un cerebro cuyo peso aproximado es 4lb.

a) Encuentra el modelo matemático que exprese, el peso aproximado del cerebro como una función que dependa del peso de la persona.

R: a)  $C(w) = \frac{2}{75}w$ . b)  $C(176) = \frac{352}{75}lb$ .

b) Determina el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 176lb.

8. La relación entre grados Celsius ( $T_c$ ) y grados Fahrenheit ( $T_f$ ) es lineal.

a) Exprese  $T_f$  en función de  $T_c$  si ( $0^\circ C, 32^\circ F$ ) y ( $60^\circ C, 140^\circ F$ ) están en la gráfica de  $T_f$ .

b) Demuestra que  $100^\circ C$  es equivalente al punto de ebullición en la escala Fahrenheit de  $212^\circ F$ .

R: a)  $T_f = \frac{9}{5}T_c + 32$ . b) Si es equivalente.

9. En un bosque, un animal depredador se alimenta de su presa, para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función  $f(x)$ ,  $x$  denota el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función  $g(t)$ , donde  $t$  representa del número de semanas que han transcurrido desde el fin de la temporada de caza. Si  $f(x) = \frac{1}{48}x^2 - 2x + 50$  y  $g(t) = 4t + 52$ , donde  $0 \leq t \leq 15$ .

a) Determina un modelo matemático que exprese la población de depredadores como una función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza.

b) Determina la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

R: a)  $f[g(t)] = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{7}{3}$ . b)  $f[g(11)] = \frac{136}{3}$  depredadores.

10. En un ambiente limitado donde  $K$  es el número óptimo de bacterias soportado por el ambiente, la tasa del crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional a la cantidad presente de bacterias, y la diferencia entre  $K$  y la cantidad presente. Suponga que el número óptimo soportable por un ambiente particular es de  $1 \times 10^6$  bacterias, y la tasa es de  $60 \frac{\text{bacterias}}{\text{minuto}}$  cuando tiene 1000 bacterias presentes.

a) Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento bacteriano como una función que dependa de número de bacterias presentes.

R: a)  $T(x) = \frac{2x}{333(10)^5}(10^6 - x)$ . b)  $T(1 \times 10^5) = \frac{6(10)^5}{111} \frac{\text{bact.}}{\text{min.}}$ .

b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento cuando están presentes  $1 \times 10^5$  bacterias?

11. A menudo se supone que el peso  $W$  de un cuerpo se expresa en función de su longitud  $L$ . Este supuesto se expresa mediante la función potencia  $W = kL^3$ , en donde  $k$  es una constante. Para cierto lagarto  $k = 400 \frac{\text{grs.}}{\text{m}^3}$ . Determine el peso de un saurio de  $\frac{1}{2}m$  de largo.

R: 50grs.

12. Un incendio comienza en un campo abierto y seco, se extiende en forma de círculo. El radio de tal círculo aumenta a una razón de  $6 \frac{m}{\text{min}}$ . Expresa el área con fuego en función del tiempo  $t$ .

R:  $A(t) = 36\pi t^2$ .

13. La vida media del paladio 100,  $^{100}\text{Pd}$ , es de cuatro días (de modo que la mitad de cualquier cantidad de  $^{100}\text{Pd}$  se desintegra en cuatro días). La masa inicial de una muestra es de un gramo.

a) Expresa la función  $m(t)$ , la cual indica la masa que va quedando, después de  $t$  días transcurridos.

b) Indica la masa  $m(t)$  que queda después de 16 días.

c) ¿Cuándo se reducirá la masa hasta  $\frac{1}{100}g$ ? R: a)  $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$ . b)  $m(16) = \frac{1}{16}m_0$ . c)  $t = 8 + 8 \frac{\ln 5}{\ln 2}$  días.



14. El  $pH$  de una sustancia se obtiene como  $pH = -\log[H^+]$ , donde  $[H^+]$  representa la concentración de iones de hidrogeno.

a) Obtén el valor de  $(H^+)$  de las siguientes sustancias: saliva (pacientes con cáncer), leche, orina y refresco de cola si tienen un  $pH$  correspondiente de 4.5, 5.5, 6 y 2.5.

b) Obtén el  $pH$  de las siguientes sustancias: agua pura, agua de mar, cerveza y café si tienen un valor de  $[H^+]$  correspondiente de  $10^{-7}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-\frac{9}{2}}$  y  $10^{-5}$ . R: a)  $\frac{1}{10^4\sqrt{10}}$ ,  $\frac{1}{10^5\sqrt{10}}$ ,  $\frac{1}{10^6}$ ,  $\frac{1}{10^2\sqrt{10}}$ . b) 7, 8, 4.5, 5.

15. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100, que soporta una cantidad de 1000, es  $P(t) = \frac{100000}{100 + 900e^{-t}}$  individuos, donde  $t$  se mide en años.

a) ¿Cuánto tarda la población en llegar a 900?

b) ¿Cuál es el tamaño de la población para  $t = 4$ ? R: a)  $t = 4 \ln 3$  años. b)  $P(4) = \frac{1000}{1 + e^{-4}}$  individuos.

16. Según la ley de newton del enfriamiento, si un objeto a la temperatura  $B$  está rodeado por un medio (aire o agua por ejemplo), a la temperatura  $A$ , con  $A < B$ , entonces la temperatura del objeto al cabo de  $t$  minutos es:  $f(t) = A + (B - A)10^{-kt}$ , donde  $k$  es una constante positiva.

a) ¿Qué valor tiene la  $k$  de cierto medio que se encuentra a  $20^\circ C$ , si produce un enfriamiento de  $60^\circ C$  a  $40^\circ C$  en 10 min? R: a)  $k = \frac{1}{10} \log 2$ . b)  $t = \frac{10 \log 3}{\log 2}$  min.

b) Para el medio del inciso anterior, ¿en cuánto tiempo disminuirá la temperatura de un objeto de  $100^\circ C$  a  $60^\circ C$  al introducirse en un medio que se encuentra a una temperatura de  $40^\circ C$ ?

17. La capacidad del cuerpo humano para realizar tareas variadas decrece con la edad. El libro de William Clark, *Sex and the origins of Death* presenta varias estadísticas sobre el fenómeno. Por ejemplo, la fertilidad femenina decae de 100% a la edad de 30 años a 0% a la edad de 50 años. Si  $x$  es la edad y el porcentaje de fertilidad es  $y$ , indica que:  $y = -5(x - 50)$ , para  $30 \leq x \leq 50$ . Muestra que a los 40 años se tiene una fertilidad de 50%.

En cada una de las situaciones siguientes, determina cuál edad corresponde a 50% de capacidad.

a) La capacidad respiratoria máxima decae de 100% a los 20 años a 40% a los 80 años.

b) La frecuencia cardíaca máxima decae de 100% a los 20 años a 68% a los 80 años.

c) La oxigenación máxima decae de 100% a los 20 años a 30% a los 80 años.

d) la velocidad de conducción nerviosa decae de 100% a los 20 años a 80% a los 80 años.

R: Si se cumple. a) 70 años. b)  $\frac{455}{4}$  años. c)  $\frac{440}{7}$  años. d) 170 años.

18. Una persona al caminar, al caminar, la componente vertical de la fuerza ejercida por un pie sobre el suelo se puede aproximar mediante una función trigonométrica de la forma  $F(t) = K \left( \cos \frac{\pi t}{T} - q \cos \frac{3\pi t}{T} \right)$ , donde  $K > 0$  y  $0 < q < 1$ . Las constantes  $K$  y  $q$  dependen del modo particular de caminar. El pie se posa en el suelo en el tiempo  $t = -\frac{T}{2}$  y se levanta del mismo en el tiempo  $t = \frac{T}{2}$ .

a) Demuestra que  $F\left(-\frac{T}{2}\right) = F\left(\frac{T}{2}\right)$ .

R: a) La igualdad se cumple.

b) Demuestra que  $F(t + 2T) = F(t)$ .

R: b) La igualdad se cumple.

c) Calcula las fuerzas para los tiempos  $t_1 = -\frac{1}{2}$  y  $t_2 = \frac{1}{2}$ ; si  $T = 1$ ,  $K = 2$  y  $q = \frac{1}{2}$ . c)  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .



19. El trazador (o marcador) radioactivo  $^{51}\text{Cr}$  (isótopo del cromo), puede utilizarse para localizar la posición de la placenta de una mujer embarazada; a menudo, se pide esta sustancia a un laboratorio médico. Si se envían  $A_0$  unidades (en  $\mu\text{curies}$ ), debido al decrecimiento radioactivo, el número de unidades que quedan después de  $t$

días está dado por:  $A(t) = A_0 e^{-\frac{249}{10000}t}$ .

a) Si se envían 35 unidades del trazador y éste tarda 2 días en llegar, ¿de cuántas unidades se dispone para el análisis?

b) Si se necesitan 35 unidades para la prueba. ¿Cuántas unidades se deben enviar para el mismo tiempo de entrega?

$$\text{R: a) } A(2) = \frac{35}{e^{\frac{249}{500}}} \cdot \text{b) } A_0 = 35e^{\frac{249}{500}}.$$

20. Un filtro de agua elimina en cada etapa la  $4^{\text{ta}}$  parte de las partículas contaminantes que contiene el agua. Encuentra una función que determine cuántas partículas contaminantes quedan en el agua después de la  $n$ -ésima etapa y otra que permita determinar las partículas que se eliminan en la  $n$ -ésima etapa, a partir de estas:

a) Si originalmente tiene 3200 millones de partículas contaminantes, ¿cuántas se eliminarían hasta la  $5^{\text{ta}}$  etapa?

$$\text{R: } P_p(n) = P_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n; P_q(n) = \frac{P_0}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}. \text{ a) } P_q(5) = \frac{2025}{8} \text{ millones de partículas.}$$

b) ¿Cuántas partículas permanecen después de seis etapas, si originalmente tiene 28000 millones de partículas contaminantes?

$$\text{R: b) } P_p(6) = \frac{637875}{128} \text{ millones de partículas. c) } n = -\frac{\ln 2}{\ln 3 - 2 \ln 2} \text{ etapas.}$$

c) ¿Cuántas etapas se contemplarán para que por lo menos la mitad de las partículas contaminantes se eliminen no importando cuántas se tengan originalmente?

## DOMINIO Y RANGO

Bosqueja la gráfica (las soluciones en la pág. 55) de las siguientes funciones y obtén: a) El dominio y el rango.  
b) Los puntos donde intercepta a los ejes de coordenadas.

1.  $f(x) = 4 - \frac{2}{3}x$ .

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, 4)$   
 $R_f = (-\infty, \infty)$  b)  $B(6, 0)$

2.  $f(x) = x - 6$ .

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, -6)$   
 $R_f = (-\infty, \infty)$  b)  $B(6, 0)$

3.  $f(x) = x^2 + 4x$ .

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, 0)$   
 $R_f = [-4, \infty)$  b)  $B(0, 0)$   
 $C(-4, 0)$

4.  $f(x) = -2x - \frac{1}{2}x^2 - 4$ .

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, -4)$   
 $R_f = (-\infty, -2]$

5.  $f(x) = -\sqrt{x-5}$ .

R: a)  $D_f = [5, \infty)$  b)  $A(5, 0)$   
 $R_f = (-\infty, 0]$

6.  $f(x) = -\sqrt{3-x} + 4$ .

R: a)  $D_f = (-\infty, 3]$  b)  $A(0, 4 - \sqrt{3})$   
 $R_f = (-\infty, 4]$  b)  $B(-13, 0)$

7.  $f(x) = -\sqrt{5-x^2}$ .

R: a)  $D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$  b)  $A(0, \sqrt{5})$   
 $R_f = [-\sqrt{5}, 0]$  b)  $B(-\sqrt{5}, 0)$   
 $D(0, -\sqrt{5})$



8.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ .

9.  $f(x) = -\frac{\sqrt{225-9x^2}}{5}$ .

10.  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ .

11.  $f(x) = \frac{\sqrt{100-25x^2}}{2}$ .

12.  $f(x) = -\frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}$ .

13.  $f(x) = -\frac{\sqrt{9x^2-36}}{2}$ .

14.  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ .

15.  $f(x) = -\sqrt{4+x^2}$ .

16.  $f(x) = \frac{\sqrt{36+9x^2}}{2}$ .

17.  $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ .

18.  $f(x) = -\frac{1}{x}$ .

19.  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ .

20.  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ .

R: a)  $D_f = [-3, 3]$  b)  $A(0, 3)$   
 $R_f = [0, 3]$  b)  $B(-3, 0)$   
 $D(3, 0)$

R: a)  $D_f = [-5, 5]$  b)  $A(0, -3)$   
 $R_f = [-3, 0]$  b)  $B(-5, 0)$   
 $D(5, 0)$

R: a)  $D_f = [-2, 2]$  b)  $A(-2, 0)$   
 $R_f = [0, 1]$  b)  $B(2, 0)$   
 $D(0, 1)$

R: a)  $D_f = [-4, 4]$  b)  $A(0, 5)$   
 $R_f = [0, 5]$  b)  $B(-2, 0)$   
 $D(2, 0)$

R: a)  $D_f = [-3, 3]$  b)  $A(-3, 0)$   
 $R_f = [-2, 0]$  b)  $B(3, 0)$   
 $D(0, -2)$

R: a)  $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$  b)  $A(-2, 0)$   
 $R_f = (-\infty, 0]$  b)  $B(2, 0)$

R: a)  $D_f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$  b)  $A(-3, 0)$   
 $R_f = [0, \infty)$  b)  $B(3, 0)$

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, -2)$   
 $R_f = (-\infty, -3]$

R: a)  $D_f = (-\infty, \infty)$  b)  $A(0, 3)$   
 $R_f = [3, \infty)$

R: a)  $D_f = \square - \{-2\}$  b)  $A(0, -2)$   
 $R_f = \square - \{-4\}$  b)  $B(2, 0)$

R: a)  $D_f = \square - \{0\}$  b) No existe intercepción con los ejes.  
 $R_f = \square - \{0\}$

R: a)  $D_f = \square - \{2\}$  b)  $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$   
 $R_f = (0, \infty)$

R: a)  $D_f = \square - \{3\}$  b)  $A\left(0, \frac{1}{3}\right)$   
 $R_f = \square - \{2\}$  b)  $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

## LÍMITES

A) Calcula los siguientes límites puntuales utilizando los teoremas correspondientes de límites.

1.  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2-2}$ .

R:  $\sqrt{23}$ .

2.  $\lim_{y \rightarrow 7} \frac{7+y}{8-y}$ .

R: 0.



$$3. \lim_{h \rightarrow 6} [(h+3)(h-5)^{\frac{3}{2}}]$$

R: 9.

$$4. \lim_{r \rightarrow 2} (1-r^2-2r)$$

R: -7.

$$5. \lim_{\gamma \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[5]{\gamma^3+7}}$$

R:  $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

$$6. \lim_{\phi \rightarrow 2} \frac{\phi^2-4}{\phi^3-8}$$

R:  $\frac{1}{3}$

$$7. \lim_{\phi \rightarrow 5} \frac{\phi^3+2\phi^2-15\phi}{2\phi^2+7\phi-15}$$

R:  $-\frac{40}{13}$

$$8. \lim_{\Delta x \rightarrow 3} \frac{(\Delta x)^2+6\Delta x+9}{(\Delta x)^3+27}$$

R: 0.

$$9. \lim_{z \rightarrow 4} \frac{z^2-7z+12}{z^3-z^2-10z-8}$$

R:  $\frac{1}{30}$

$$10. \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3+6t^2+12t+8}{t^3+2t^2-3t-6}$$

R: 0.

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^4-16)(x^3-8)}{x^2-4x+4}$$

R: 384.

$$12. \lim_{y \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{10y^2-18y-4}{15y^2+13y+2}$$

R:  $-\frac{22}{7}$

$$13. \lim_{h \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2h^2-9h+9}{2h^2+5h-12}$$

R:  $-\frac{3}{11}$

$$14. \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3+3r^2+8r}{r^4-\frac{1}{5}r^2+\frac{1}{2}r}$$

R: 16.

$$15. \lim_{\gamma \rightarrow \frac{5}{2}} \sqrt{\frac{2\gamma-5}{6\gamma^2-13\gamma-5}}$$

R:  $\frac{\sqrt{34}}{17}$

$$16. \lim_{\phi \rightarrow 2} \frac{4-\phi^2}{3-\sqrt{\phi^2+5}}$$

R: 6.

$$17. \lim_{\phi \rightarrow 5} \frac{\phi-5}{\sqrt{\phi}-\sqrt{5}}$$

R:  $2\sqrt{5}$

$$18. \lim_{\Delta x \rightarrow 3} \frac{\Delta x-3}{\sqrt{\Delta x}-3}$$

R: 0.

$$19. \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2z+7}-\sqrt{z+5}}{z+2}$$

R:  $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{4}$

$$20. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t}$$

R: 0.

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$$

R:  $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$

$$22. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{\sqrt[3]{y}-1}$$

R: 3.

$$23. \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h}-1}{\sqrt[5]{h}-1}$$

R:  $\frac{5}{2}$

$$24. \lim_{r \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{r}-4}{\sqrt{r}-8}$$

R:  $\frac{1}{3}$

$$25. \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\gamma}-1}{\sqrt[4]{\gamma}-1}$$

R:  $\frac{4}{3}$

$$26. \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\phi+3}-\frac{1}{3}}{\phi}$$

R:  $-\frac{1}{9}$

$$27. \lim_{\phi \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-\phi} - \frac{3}{1-\phi^3} \right)$$

R: -1.

$$28. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$$

R: 4.

$$29. \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{z}{z^2+5z+6} - \frac{2}{z^2+3z+2} \right)$$

R: 5.

$$30. \lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{t^2}{t-1} - \frac{1}{t^2-t} \right)$$

R: 3.

$$31. \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{\sqrt{1+s}} - 1 \right) \right]$$

R:  $-\frac{1}{2}$

$$32. \lim_{m \rightarrow 2} \left( \frac{1}{m} \left( \frac{1}{(2+m)^2} - \frac{1}{4} \right) \right)$$

R:  $-\frac{1}{4}$

$$33. \lim_{n \rightarrow 3} \left( \frac{3}{n+3} + \frac{18}{n^2-9} \right)$$

R:  $-\frac{1}{2}$

$$34. \lim_{\rho \rightarrow 3} \left( \frac{1}{\rho+3} - \frac{2}{\rho-3} + \frac{6}{\rho^2-9} \right)$$

R:  $\frac{1}{6}$

$$35. \lim_{\beta \rightarrow 2} \left( \frac{\beta-1}{\beta-2} - \frac{\beta+1}{\beta+2} + \frac{\beta-6}{\beta^2-4} \right)$$

R:  $\frac{3}{4}$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4t}-2}{\sqrt{2t}-2} \quad \text{R: } \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{1+n}} - 1 \right) \right)$$

B) Aplica el teorema de límites laterales, obtén el límite de las siguientes funciones por intervalos en el punto indicado.

$$1. f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 5 \\ 3x & \text{si } x > 5 \end{cases}; \text{ en } x = 5.$$

R: No existe.



$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3; \text{ en } x = 3. \\ 6x - x^2 - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

R: 7.

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x < 3 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}; \text{ en } x = 3.$$

R: No existe.

$$4. f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 < x < 2; \text{ en a) } x = -2. \\ -\sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

R: 0.

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2; \text{ en } x = 2. \\ 3x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: 5.

$$6. f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 < x < 2; \text{ en a) } x = 2. \\ -\sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

R: No existe.

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2; \text{ en } x = 2. \\ 5 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: No existe.

$$8. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}; \text{ en } x = 1.$$

R: 1.

$$9. f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > -4 \end{cases}; \text{ en } x = -4.$$

R: No existe.

$$10. f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x = 3; \text{ en } x = 3. \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

R: 4.

C) Calcula los siguientes límites de las funciones cuya variable independiente tienden al infinito.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 + 5x - x^2}.$$

R: -3.

$$2. \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

R: 1.

$$3. \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{6\gamma^2 - 2\gamma - 4}{10\gamma^2 + 8\gamma + 2}.$$

R:  $\frac{3}{5}$ .

$$4. \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{3\phi^4 - 4\phi^3 + 6\phi^2 - 3\phi + 8}{-2\phi^3 + 5\phi^4 - 3\phi^2 + \phi - 1}.$$

R:  $\frac{3}{5}$ .

$$5. \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{2\varphi + 8}{\varphi^2 - 2\varphi + 5}.$$

R: 0.

$$6. \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(1-r)(2+r)}{(1+2r)(2-3r)}.$$

R:  $\frac{1}{6}$ .

$$7. \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{3h^2 - 2h - 1}{h^3 + 4} - \frac{h^2 + h - 1}{2h^2 - 3h} \right).$$

R:  $-\frac{1}{2}$ .

$$8. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^3 - 3t + 8}{2t^4 - 5t^2 + t^3 - 1}.$$

R: 0.

$$9. \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2h^2 - h^3 + 1}{1 - h^7}.$$

R: 0.

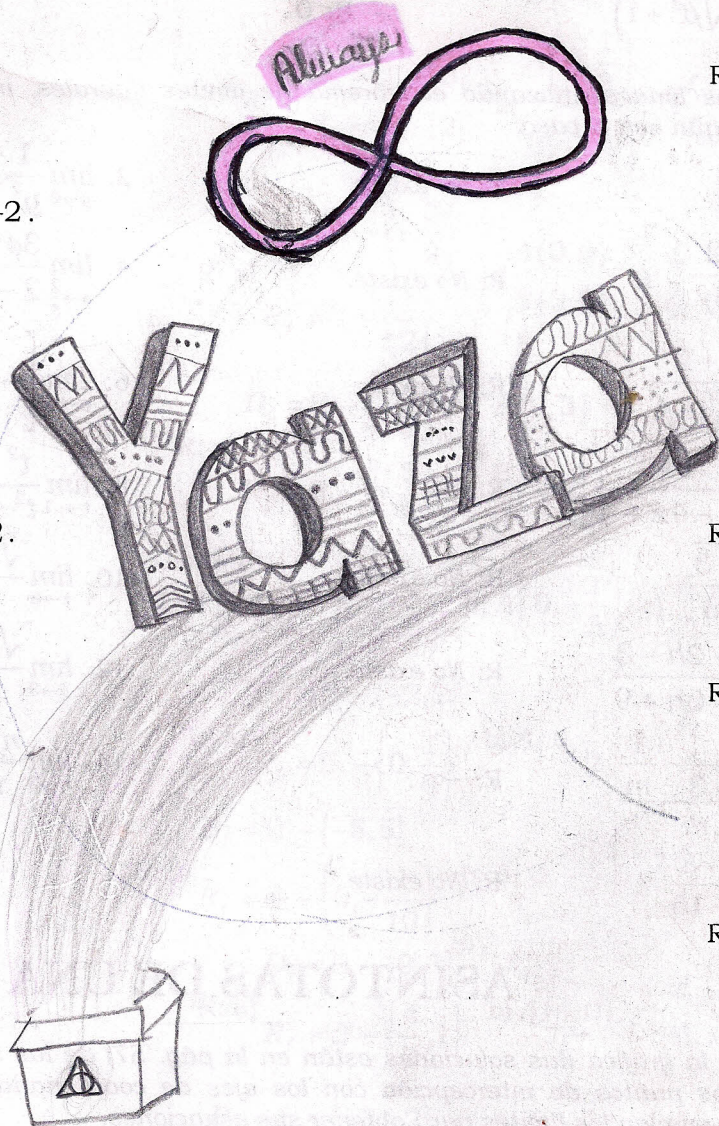
$$10. \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \sqrt{\Delta x}}.$$

R: 0.

$$11. \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s^2 + 4}.$$

R: 0.

$$12. \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\sqrt{\rho^2 + \rho} - \rho).$$

R:  $\frac{1}{2}$ .



13.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\sqrt{m^2 + 2}}$ .

R: 1.

14.  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3z^2 - 5}}{z - 2}$ .

R:  $\sqrt{3}$ .

15.  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta - \sqrt{\beta^2 + 1})$ .

R: 0.

D) Evalúa los límites utilizando el teorema de límites laterales, indicando si está en el  $\infty$ , en el  $-\infty$  ó esta indefinido según sea el caso.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x} \right)$ .

R: No existe.

2.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2}$ .

R:  $\infty$ .

3.  $\lim_{\gamma \rightarrow -\frac{2}{5}} \frac{\gamma + 2}{2 + 5\gamma}$ .

R: No existe.

4.  $\lim_{\phi \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{3\phi + 2}{2 - 3\phi}$ .

R: No existe.

5.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 2} \frac{\Delta x + 2}{(\Delta x)^2 - 4}$ .

R: No existe.

6.  $\lim_{\phi \rightarrow -3} \left[ -\frac{1}{(\phi + 3)^2} \right]$ .

R:  $-\infty$ .

7.  $\lim_{z \rightarrow 2} \left[ -\frac{10}{z^2 - 4z + 4} \right]$ .

R:  $-\infty$ .

8.  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 - t - 2}{t^2 + 2t + 1}$ .

R: No existe.

9.  $\lim_{s \rightarrow -3} \frac{\sqrt{s+3}}{s+3}$ .

R: No existe.

10.  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{r+1} - 1}{r^2}$ .

R: No existe.

11.  $\lim_{h \rightarrow 3} \frac{h^2 - 2h - 3}{h^2 - 6h + 9}$ .

R: No existe.

12.  $\lim_{\beta \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\beta}}{3 - \beta}$ .

R: No existe.

13.  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m+3} - \frac{1}{m}}{m}$ .

R:  $-\infty$ .

14.  $\lim_{n \rightarrow 3} \frac{n^3 - 3n^2 - n + 3}{n^3 + 2n^2 - 3n}$ .

R: 0.

15.  $\lim_{\rho \rightarrow -2} \frac{\rho^3 - 8}{\rho^4 - 16}$ .

R: No existe.

cuando tienen la misma indeterminación  
es  $\infty$ , cuando  $\frac{0}{0}$

## ASINTOTAS DE UNA FUNCIÓN

A) Bosqueja la gráfica (las soluciones están en la pág. 57) de las siguientes funciones y reporta: a) El dominio y rango. b) Los puntos de intercepción con los ejes de coordenadas. c) En caso de tener asíntotas verticales y horizontales emplea los límites para obtener sus ecuaciones.

1.  $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ .

R: a)  $D_f = \square$   $A(0,0)$   
 $R_f = \square$  b)  $B(0,0)$

2.  $f(x) = \frac{9 - x^2}{x - 3}$ .

R: a)  $D_f = \square - \{3\}$   $A(0,-3)$   
 $R_f = \square - \{-6\}$  b)  $B(-3,0)$

3.  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{5 - x}$ .

R: a)  $D_f = \square - \{5\}$   $A(0,0)$   
 $R_f = \square - \{-25\}$  b)  $B(0,0)$

4.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ .

R: a)  $D_f = \square - \{-2\}$   $A(0,-2)$   
 $R_f = \square - \{-4\}$  b)  $B(2,0)$

5.  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x - 1}$ .

R: a)  $D_f = \square - \{1\}$   $A(0,0)$   
 $R_f = \square - \{0\}$  b)  $B(0,0)$

6.  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ .

R: a)  $D_f = \square - \{2\}$   $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$  c)  $\ell_v: x - 2 = 0$   
 $R_f = (0, \infty)$  b)  $\ell_H: y = 0$



$$7. f(x) = \frac{x+6}{4-x}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{4\} \quad \text{b) } A\left(0, \frac{3}{2}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x-4=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad B(-6,0) \quad \ell_H : y+1=0$$

$$8. f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{3\} \quad \text{b) } A\left(0, \frac{1}{3}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x-3=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad B\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \ell_H : y-2=0$$

$$9. f(x) = \frac{x}{2x+3}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \quad \text{b) } A(0,0) \quad \text{c) } \ell_V : 2x+3=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad B(0,0) \quad \ell_H : 2y-1=0$$

$$10. f(x) = \frac{3-5x}{3x+1}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{b) } A(0,3) \quad \text{c) } \ell_V : 3x+1=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\} \quad B\left(\frac{3}{5}, 0\right) \quad \ell_H : 3y+5=0$$

$$11. f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \quad \text{b) } A\left(0, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x-3=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{6}, 0\right\} \quad B\left(0, -\frac{1}{3}\right) \quad \ell_H : y=0$$

$$12. f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \quad \text{b) } A\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x-2=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{4}\right\} \quad B\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \ell_H : y=0$$

$$13. f(x) = \frac{5-x}{x^2-25}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{-5, 5\} \quad \text{b) } A\left(0, -\frac{1}{5}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x-5=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{1}{10}\right\} \quad B\left(0, -\frac{1}{5}\right) \quad \ell_H : y=0$$

$$14. f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-3x}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{0, 3\} \quad \text{b) } A(4,0) \quad \text{c) } \ell_V : x+3=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}, 1\right\} \quad B(4,0) \quad \ell_H : y-1=0$$

$$15. f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$$

$$\text{R: a) } D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\} \quad \text{b) } A\left(0, -\frac{5}{3}\right) \quad \text{c) } \ell_V : x+3=0 \\ R_f = \mathbb{R} - \{-7, 1\} \quad B(5,0) \quad \ell_H : y-1=0$$

## CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Aplica la definición de continuidad en un punto. Analiza las siguientes funciones en el punto que se indica para determinar si son continuas; de lo contrario indica qué tipo de discontinuidad presentan y bosqueja la gráfica (obten los puntos necesarios como: intercepción con los ejes de coordenadas, asíntotas, vértices, etc.). Las gráficas se localizan en la pág. 58.

$$1. f(x) = 6 - 2x; \text{ en } x = 0.$$

R: La función es continua en  $x = 0$ .

$$2. f(x) = 4 - 6x - x^2; \text{ en } x = -3.$$

R: La función es continua en  $x = -3$ .

$$3. f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}; \text{ en } x = -2.$$

R: La función no está definida en  $x = -2$ .

$$4. f(x) = \frac{x+6}{4-x}; \text{ en } x = 4.$$

R: La función no está definida en  $x = 4$ .



$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}; \text{ en } x = 3.$$

R: La función es discontinua removible en  $x = 3$ .

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}; \text{ en } x = -2.$$

R: La función es discontinua removible en  $x = -2$ .

$$7. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-5x^2}{5-x} & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}; \text{ en } x = 5.$$

R: La función es discontinua removible en  $x = 5$ .

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-3} & \text{si } x \neq \frac{3}{2} \\ -3 & \text{si } x = \frac{3}{2} \end{cases}; \text{ en } x = \frac{3}{2}.$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = \frac{3}{2}$ .

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{4-x} & \text{si } x \neq 4 \\ 5 & \text{si } x = 4 \end{cases}; \text{ en } x = 4.$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = 4$ .

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} & \text{si } x \neq 2 \\ -2 & \text{si } x = 2 \end{cases}; \text{ en } x = 2.$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = 2$ .

$$11. f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2-9} & \text{si } x \neq \pm 3 \\ 4 & \text{si } x = -3; \text{ en a) } x = -3 \text{ y b) } x = 3. \\ -4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua removible en  $x = -3$ , b) La función es discontinua esencial en  $x = 3$ .

$$12. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x}{x^2-3x} & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 0; \text{ en a) } x = 0 \text{ y b) } x = 3. \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua removible en  $x = 0$ , b) La función es discontinua esencial en  $x = 3$ .

$$13. f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ 1 & \text{si } x = -1; \text{ en a) } x = -1 \text{ y b) } x = 1 \text{ (no graficar).} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua esencial en  $x = -1$ , b) La función es discontinua esencial en  $x = 1$ .

$$14. f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{9-x^2} & \text{si } x \neq \pm 3 \\ 1 & \text{si } x = -3; \text{ en a) } x = -3 \text{ y b) } x = 3 \text{ (no graficar).} \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua esencial en  $x = -3$ , b) La función es discontinua esencial en  $x = 3$ .



$$15. f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; \text{ en } x = 0.$$

R: La función es continua en  $x = 0$ .

$$16. f(x) = \begin{cases} -2-x & \text{si } x < 2 \\ -4 & \text{si } x = 2; \text{ en } x = 2. \\ x-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: La función es continua en  $x = 2$ .

$$17. f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x = 3; \text{ en } x = 3. \\ 10-2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

R: La función es discontinua removible en  $x = 3$ .

$$18. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}; \text{ en } x = -2.$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = -2$ .

$$19. f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1; \text{ en } x = -1. \\ 2x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

R: La función es discontinua removible en  $x = -1$ .

$$20. f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2; \text{ en } x = 2. \\ 6x-x^2-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = 2$ .

$$21. f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 4 \\ 3-x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}; \text{ en } x = 4.$$

R: La función es discontinua esencial en  $x = 4$ .

$$22. f(x) = \begin{cases} x^2-3x & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2; \text{ en } x = 2. \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: La función es discontinua removible en  $x = 2$ .

$$23. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & 0 < x < 2; \text{ en a) } x = 0 \text{ y b) } x = 2. \\ -\sqrt{x^2-4} & x \geq 2 \end{cases}$$

R: a) La función es continua en  $x = 0$ , b) La función es continua en  $x = 2$ .

$$24. f(x) = \begin{cases} -4-2x & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 < x < 2; \text{ en a) } x = -2 \text{ y b) } x = 2. \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 2x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua removible en  $x = -2$ . b) La función es discontinua removible en  $x = 2$ .

$$25. f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } -2 \leq x < 2; \text{ en a) } x = -2 \text{ y b) } x = 2. \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ 3-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua esencial en  $x = -2$ . b) La función es discontinua removible en  $x = 2$ .



$$26. f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - 4} & x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & -2 < x < 2; \text{ en a) } x = -2 \text{ y b) } x = 2. \\ -\sqrt{x^2 + 4} & x \geq 2 \end{cases}$$

R: a) La función es continua en  $x = -2$ . b) La función es discontinua esencial en  $x = 2$ .

$$27. f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -3 \\ 9 - x^2 & \text{si } -3 < x < 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \\ 3 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}; \text{ en a) } x = -3 \text{ y b) } x = 3.$$

R: a) La función es continua en  $x = -3$ . b) La función es discontinua removible en  $x = 3$ .

$$28. f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x \leq -2 \\ 1 & -2 < x < 2; \text{ en a) } x = -2 \text{ y b) } x = 2. \\ 4 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

R: a) La función es discontinua esencial en  $x = -2$ . b) La función es discontinua esencial en  $x = 2$ .

## LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, POR DEFINICIÓN

Aplica la definición  $\left( f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ ; para obtener las derivadas de las siguientes funciones algebraicas.

1.  $f(x) = \sqrt{4}$ .

R:  $f'(x) = 0$ .

2.  $f(x) = x$ .

R:  $f'(x) = 1$ .

3.  $f(y) = \frac{1}{y}$ .

R:  $f'(y) = -\frac{1}{y^2}$ .

4.  $f(r) = \sqrt{r}$ .

R:  $f'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}$ .

5.  $f(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$ .

R:  $f'(h) = -\frac{1}{2h\sqrt{h}}$ .

6.  $f(x) = x - x^2$ .

R:  $f'(x) = 1 - 2x$ .

7.  $f(t) = \frac{1}{t+2}$ .

R:  $f'(t) = -\frac{1}{(t+2)^2}$ .

8.  $f(s) = \sqrt{4-s}$ .

R:  $f'(s) = -\frac{1}{2\sqrt{4-s}}$ .

9.  $f(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{\alpha+5}}$ .

R:  $f'(\alpha) = -\frac{3}{2(\alpha+5)\sqrt{\alpha+5}}$ .

10.  $f(\phi) = \frac{\phi-5}{2-\phi}$ .

R:  $f'(\phi) = -\frac{3}{(2-\phi)^2}$ .

11.  $f(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1$ .

R:  $f'(t) = t^2 + t - 1$ .

12.  $f(\phi) = \sqrt{\phi^2 + 3}$ .

R:  $f'(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 3}}$ .



## DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Aplica las fórmulas para derivar las siguientes funciones algebraicas.

$$1. f(x) = (1 + \sqrt{3})^2.$$

$$R: f'(x) = 0.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

$$R: f'(x) = x^2 + x - 1.$$

$$3. f(t) = (t^4 - 1)^{15}.$$

$$R: f'(t) = 60t^3(t^4 - 1)^{14}.$$

$$4. f(r) = \frac{r-3}{r+2}.$$

$$R: f'(r) = \frac{5}{(r+2)^2}.$$

$$5. f(h) = h\sqrt{4-h}.$$

$$R: f'(h) = \frac{8-3h}{2\sqrt{4-h}}.$$

$$6. f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi^2 - a}}.$$

$$R: f'(\phi) = -\frac{\phi}{(\phi^2 - a)\sqrt{\phi^2 - a}}.$$

$$7. f(\gamma) = \sqrt[5]{(\gamma^2 - 3\gamma^3 + \gamma)^3}.$$

$$R: f'(\gamma) = \frac{6\gamma - 27\gamma^2 + 3}{5\sqrt[5]{(\gamma^2 - 3\gamma^3 + \gamma)^2}}.$$

$$8. f(s) = \frac{s^5}{(3s+1)^4}.$$

$$R: f'(s) = \frac{3s^5 + 5s^4}{(3s+1)^5}.$$

$$9. f(h) = \sqrt[3]{(h^2 - 3h^3 + 5)^5}.$$

$$R: f'(h) = \left(\frac{10}{3}h - 15h^2\right)\sqrt[3]{(h^2 - 3h^3 + 1)^2}.$$

$$10. f(\theta) = \frac{\theta^2 - 4}{\theta^2 + 4}.$$

$$R: f'(\theta) = \frac{16\theta}{(\theta^2 + 4)^2}.$$

$$11. f(m) = \sqrt{\frac{m-1}{m+1}}.$$

$$R: f'(m) = \frac{1}{(m+1)\sqrt{m^2-1}}.$$

$$12. f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^5.$$

$$R: f'(x) = -\frac{10(1-x)^4}{(1+x)^6}.$$

$$13. f(y) = \frac{y^2}{\sqrt{3y^2 - 5y}}.$$

$$R: f'(y) = \frac{3y(2y-5)}{2(3y^2-5)\sqrt{3y^2-5y}}.$$

$$14. f(t) = (t^6 - 7)^4(6t - 2t^4)^5.$$

$$R: f'(t) = (144t^5 - 88t^9 + 280t^3)(t^6 - 7)^3(6 - 2t^4)^4.$$

$$15. f(r) = \frac{\sqrt{r} + 2}{\sqrt{r} - 2}.$$

$$R: f'(r) = -\frac{2}{\sqrt{r}(\sqrt{r}-2)^2}.$$

$$16. f(x) = x^2\sqrt{(a^2 - x^2)^3}.$$

$$R: f'(x) = (5x^3 - 2a^2x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$17. f(h) = [h + (h^2 - 4)^3]^{10}.$$

$$R: f'(h) = [10h + 60h(h^2 - 4)^2][h + (h^2 - 4)^3]^9.$$

$$18. f(\theta) = \sqrt{1 + \sqrt{\theta}}.$$

$$R: f'(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{\theta + \theta}}.$$

$$19. f(\gamma) = \frac{\gamma(2\gamma - 5)^4}{(\gamma + 1)^8}.$$

$$R: f'(\gamma) = \frac{(45\gamma - 6\gamma^2 - 5)(2\gamma - 5)^3}{(\gamma + 1)^9}.$$



20.  $f(s) = \sqrt[3]{(s+1)^2} \sqrt{(s-1)^3}$ .

R:  $f'(s) = \frac{(13s+5)\sqrt{s-1}}{6\sqrt[3]{s+1}}$ .

21.  $f(h) = \frac{h}{\sqrt[3]{h^3-3h}}$ .

R:  $f'(h) = -\frac{2}{(h^2-3)\sqrt[3]{h^3-3h}}$ .

22.  $f(k) = \sqrt{\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}}$ .

R:  $f'(k) = -\frac{2kh^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^4-k^4}}$ .

23.  $f(t) = \sqrt[3]{t} - \frac{4t}{\sqrt{t}} + 3t\sqrt[5]{t}$ .

R:  $f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{18}{5}\sqrt[5]{t}$ .

24.  $f(r) = \frac{b^2-r^2}{\sqrt{b^2+r^2}}$ .

R:  $f'(r) = -\frac{3rb^2+r^3}{(b^2+r^2)\sqrt{b^2+r^2}}$ .

25.  $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{1-\sqrt{x}}$ .

R:  $f'(x) = \frac{6-\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})^2\sqrt{6x-x^2}}$ .

## DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS, DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Obtén la derivada  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ , tal que  $y$  se define implícitamente a través de las ecuaciones dadas en cada uno de los siguientes incisos.

1.  $x^2 + y^2 = 16$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

2.  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 9$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ .

3.  $x^{\frac{2}{3}} - xy + y^{\frac{2}{3}} = 4$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{3y\sqrt[3]{xy} - 2\sqrt[3]{y}}{2\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{xy}}$ .

4.  $x^2y + xy^2 = -2$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$ .

5.  $x^3y^3 - y = x$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}$ .

6.  $\sqrt{xy} = 2x - 2y$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{xy} - y}{x + 4\sqrt{xy}}$ .

7.  $x^3 - 3\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = 12$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3 + 3x^2y - 3x^4y^2}{3x^3 + 2xy^2}$ .

8.  $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2y^2}{2xy^5 - 2x^3y}$ .

9.  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{\frac{y}{x}}$ .

10.  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{3}y - 14x}{26y - 6\sqrt{3}x}$ .



## APLICACIONES DE LA DERIVADA

A) RECTAS TANGENTE Y NORMAL. Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de la gráfica de las siguientes funciones; el valor de la abscisa del punto se proporciona en cada inciso.

1.  $f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ ; en  $x = \frac{1}{2}$ .

R:  $\ell_T : 78x - 4y + 21 = 0$   
 $\ell_N : 2x + 39y - 586 = 0$

2.  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ; en  $x = -\frac{5}{3}$ .

R:  $\ell_T : 45x - y - 89 = 0$   
 $\ell_N : 3x + 135y + 1885 = 0$

3.  $f(x) = x\sqrt{16+x^2}$ ; en  $x = 0$ .

R:  $\ell_T : 4x - y = 0$   
 $\ell_N : x + 4y = 0$

4.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ; en  $x = -3$ .

R:  $\ell_T : \sqrt{2}x + 2y - 3\sqrt{2} = 0$   
 $\ell_N : \sqrt{2}x - y + 6\sqrt{2} = 0$

5.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - 5x}}$ ; en  $x = -1$ .

R:  $\ell_T : 21\sqrt{2}x - 64y + 5\sqrt{2} = 0$   
 $\ell_N : 128\sqrt{2}x + 42y + 149 = 0$

6.  $x^3 + y^3 = 4xy + 1$ ; en  $P(2,1)$ .

R:  $\ell_T : 8x - 5y - 11 = 0$   
 $\ell_N : 5x + 8y - 18 = 0$

7.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ ; en  $P(8,1)$ .

R:  $\ell_T : x - 2y - 6 = 0$   
 $\ell_N : 2x + y - 17 = 0$

8.  $y^2(x^2 + y^2) = 2x$ ; en  $P(1,1)$ .

R:  $\ell_T : y - 1 = 0$   
 $\ell_N : x - 1 = 0$

9.  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ ; en  $P(3,4)$ .

R:  $\ell_T : 3x + 2y - 17 = 0$   
 $\ell_N : 2x - 3y + 6 = 0$

10.  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$ ; en  $P(\sqrt{3},1)$ .

R:  $\ell_T : \sqrt{3}x + y - 4 = 0$   
 $\ell_N : \sqrt{3}x - 3y = 0$

11. Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de la gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x$ , donde la pendiente de la recta tangente es cero.

R:  $\ell_{T_1} : y + 2 = 0$   $\ell_{N_1} : x + 1 = 0$   
 $\ell_{T_2} : y - 2 = 0$   $\ell_{N_2} : x - 1 = 0$

B) RAZÓN DE CAMBIO. Resuelve los siguientes problemas:

1. Un proyectil es disparado directamente hacia arriba con una rapidez de  $100\frac{m}{s}$ . La altura se determina por medio de la siguiente función  $h(t) = 100t - 5t^2$ , donde  $h(t)$  es la altura en metros sobre el punto de partida y  $t$  es el tiempo transcurrido en segundos después del lanzamiento. Obtén: R: a)  $v(2) = 80\frac{m}{s}$ ,  $v(11) = -10\frac{m}{s}$ .

a) La velocidad (razón de cambio) del proyectil después de  $t = 2$  s. y  $t = 11$  s.

b) ¿En esos momentos está subiendo o bajando el proyectil? c) ¿En qué tiempo alcanza su máxima altura y cual es esta? R: b) En  $t = 2$  el proyectil sube y en  $t = 11$  baja. c)  $h_{\max}(10) = 500$  m.

2. Cierta cultivo de bacterias crece de modo que tiene una población dada por  $m(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1$  gr. después de  $t$  horas. R: a)  $m(2) = 3$  grs.,  $m(2.01) = \frac{60401}{20000}$  grs. b)  $m'(2) = 2$  grs.,  $m'(2.01) = \frac{201}{100}$  grs.

a) ¿Cuánto creció durante el intervalo  $2 \leq t \leq 2.01$ ?

b) ¿Cuál es la razón de crecimiento instantáneo (razón de cambio) cuándo  $t = 2$  y  $t = 2.01$ ?



3. El peso en gramos de un tumor maligno en el momento  $t$  es  $u(t) = \frac{1}{5}t^2 - \frac{9}{100}t$ , donde  $t$  se mide en semanas. Obtén el índice de crecimiento (razón de cambio) del tumor cuando  $t = 10$  y  $t = 12$  semanas.

$$R: u'(10) = \frac{391}{100} \text{ grs.}; u'(12) = \frac{471}{100} \text{ grs.}$$

4. Al inicio de un experimento se determinó en un cultivo de bacterias 10 000 *individuos*. Se observó el crecimiento de la población y se encontró que  $t$  horas después de empezado el experimento, el tamaño de la población  $p(t)$  es posible expresarlo como  $p(t) = 2500(2+t)^2$ . Determina:

- a) La expresión para la razón de crecimiento de la población en cualquier tiempo  $t$ .  
b) Calcula la razón de crecimiento para  $t = 15 \text{ min.}$  y  $t = 2 \text{ hrs.}$

$$R: a) p'(t) = 5000(2+t). b) p'\left(\frac{1}{4}\right) = 11250 \frac{\text{bacterias}}{\text{hrs.}}. p'(2) = 20000 \frac{\text{bacterias}}{\text{hrs.}}$$

5. Una empresa ha estimado que el costo de producir  $x$  artículos está dado por la función  $f(x) = 2000 + 3x + \frac{1}{1000}x^2 + \frac{1}{5000}x^3$ . Obtén el costo marginal (razón de cambio) a un nivel de producción de 100 unidades.

$$R: f'(100) = \frac{46}{5}$$

6. Una epidemia se propaga a través de una población. El número de individuos infectados después de  $t$  meses está dado mediante la función  $N(t) = 1000(\sqrt{t^3} + t^2)$ . Obtén  $N'(t)$ , evalúa  $N(9)$  y  $N'(9)$ , e interpreta los valores.

$$R: N'(t) = 1500\sqrt{t} + 2000t; N(9) = 108\,000 \text{ individuos}; N'(9) = 22500 \frac{\text{individuos}}{\text{mes}}$$

7. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande al transcurrir el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de  $2 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}$ . ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide  $8 \text{ cm}$ ?

$$R: \frac{dA}{dt} = 8\sqrt{3} \frac{\text{cm}}{\text{hr}}$$

8. Una partícula se mueve sobre la gráfica de  $y^2 = x + 1$  de manera que  $\frac{dx}{dt} = 4x + 4$ . ¿Cuál es el valor de  $\frac{dy}{dt}$  cuando  $x = 1$ ?

$$R: \frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

9. La razón  $R$  en la cual una reacción química progresa con el tiempo es igual a  $\sqrt{T}$ , donde  $T$  es la temperatura. Si  $T$  varía con el tiempo  $t$  de acuerdo a la fórmula  $T = \frac{3t+1}{t+2}$ , encuentra la razón de cambio de  $R$  respecto a  $t$ .

$$R: \frac{dR}{dt} = \frac{5}{2(t+2)\sqrt{3t^2+7t+2}}$$

10. Un tanque de aceite en forma de cilindro de radio igual a  $8 \text{ m}$  se está llenando de forma vertical a una razón constante de  $10 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ . ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del aceite?

$$R: \frac{dh}{dt} = \frac{5}{32\pi} \frac{\text{m}}{\text{min.}}$$

11. Un insecto se desplaza a lo largo de la gráfica de  $y = x^2 + 4x + 1$ , en donde  $x$  y  $y$  se miden en centímetros. Si la abscisa  $x$  varía a razón constante de  $3 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$ . ¿Cuán rápido está variando la ordenada en el punto  $P(2,13)$ ?

$$R: \frac{dy}{dt} = 24 \frac{\text{cm}}{\text{min.}}$$



12. La proporción  $P$  de semillas que germinan depende de la temperatura  $T$  del suelo. Suponga que bajo ciertas condiciones  $P = T^7$  y que  $T$  varía referido a la profundidad de  $x$  debajo de la superficie como

$$T = \frac{x^2 + 3}{x + 3}. \text{ Encuentra la razón de cambio de } P \text{ en cuanto a la profundidad. } R: \frac{dP}{dx} = \frac{(7x^2 + 42x - 21)(x^2 + 3)^5}{(x + 3)^8}.$$

13. La velocidad  $S$  de la sangre que se encuentra a  $r$  centímetros del centro de la arteria es  $S = C(R^2 - r^2)$  donde  $C$  es una constante,  $R$  es el radio de la arteria y  $S$  se mide en  $\frac{cm}{s}$ . Supóngase que a la persona se le

administra un medicamento y la arteria se empieza a dilatar a razón de  $\frac{dR}{dt}$ . A una distancia constante  $r$ ,

encuentre la rapidez a la que cambia  $S$  respecto a  $t$ , si  $C = 1.76 \times 10^5$ ,  $R = 1.2 \times 10^{-2} \text{ cm}$  y  $\frac{dR}{dt} = 10^{-5} \frac{cm}{s}$ .

$$R: \frac{dS}{dt} = \frac{132}{3125} \frac{cm}{s}.$$

14. Suponga que el área infectada de una herida es circular. Si el radio del área infectada es  $3mm$  y está creciendo a razón de  $1 \frac{mm}{hr}$ . R: a)  $\frac{dA}{dt} = 6\pi \frac{mm}{hr}$ ; b)  $\frac{dA}{dt} = 12\pi \frac{mm}{hr}$ ; c) Por que el área está en función del radio.

a) ¿A qué razón está creciendo el área infectada?

b) Si el radio del área infectada es de  $6mm$  ¿A qué razón está creciendo el área infectada?

c) Explica en términos de sentido común por qué esta razón es mayor a la anterior.

15. Supóngase que un tumor en el cuerpo de una persona es de forma esférica. Si cuando el radio del tumor es de  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ , éste crece a una tasa de  $\frac{1}{1000} \frac{cm}{día}$ . R: a)  $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{1000} \frac{cm}{día}$ ; b)  $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{250} \frac{cm}{día}$ .

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del volumen del tumor en ese tiempo?

b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del área de la superficie del tumor cuando el radio es de  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ?

16. Una bacteria celular es de forma esférica. Si el radio de la bacteria crece a una tasa de  $\frac{1}{100} \frac{\mu m}{día}$  (micra) cuando el radio de ésta es de  $\frac{3}{2} \mu m$ . R: a)  $\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{100} \frac{\mu m}{día}$ ; b)  $\frac{dA}{dt} = \frac{3\pi}{25} \frac{\mu m}{día}$ .

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del volumen de la bacteria en ese tiempo?

b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del área de la superficie de la bacteria si el radio mide  $\frac{3}{2} \mu m$ ?

17. Una escalera de  $7m$  de longitud está apoyada sobre una pared.

a) Si la base de la escalera se empuja horizontalmente hacia la pared a una tasa de  $\frac{3}{2} \frac{m}{s}$ , ¿qué tan rápido se desliza hacia arriba la parte superior de la escalera sobre la pared cuando se encuentra a  $2m$  de la pared?

b) Si la base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared a una razón de  $\frac{1}{2} \frac{m}{s}$ , ¿qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera cuando su base se encuentra a  $3m$  de la pared?

$$R: a) \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{m}{s}; b) \frac{dy}{dt} = -\frac{3\sqrt{10}}{40} \frac{m}{s}.$$

18. Un incendio forestal se propaga en un círculo cuyo radio cambia a razón de  $5 \frac{m}{min}$ . Cuando el radio alcanza  $200m$ , ¿a qué razón está creciendo el área de la región incendiada?

$$R: \frac{dA}{dt} = 2000\pi \frac{m}{min}.$$



19. En la expansión adiabática del aire, la presión  $P$  y el volumen  $V$  están relacionadas por  $PV^{\frac{7}{5}} = k$ , en donde  $k$  es una constante. En cierto momento la presión es  $100 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}$  y el volumen es de  $32 \text{ in}^3$ . ¿A qué razón está variando la presión en ese instante si el volumen está decreciendo a razón de  $2 \frac{\text{in}^3}{\text{s}}$ ?

R:  $\frac{dP}{dt} = \frac{7}{80} \frac{\text{lbf}}{\text{s}}$

20. Un hombre trota a  $7.5 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$  hacia la base de una torre que tiene  $18 \text{ m}$  de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia de la base es  $24 \text{ m}$ ?

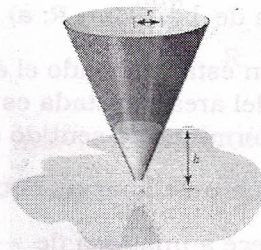
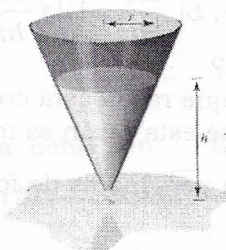
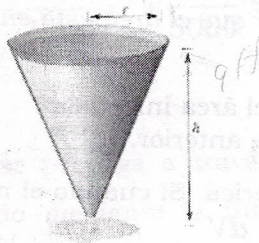
R: a)  $\frac{dh}{dt} = 6 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$

21. El agua escapa por la parte inferior del depósito cónico que se muestra en las figuras, a razón constante de  $1 \frac{\text{ft}^3}{\text{min}}$ ; si  $r = 3 \text{ ft}$  y  $h = 9 \text{ ft}$ . Determina:

R: a)  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{ft}}{\text{min}}$ . b)  $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{12\pi} \frac{\text{ft}}{\text{min}}$

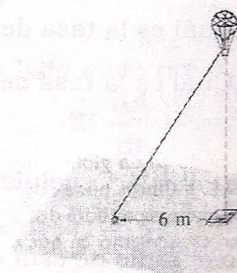
a) ¿Con qué rapidez varia el nivel del agua cuando su altura sobre el fondo es de  $6 \text{ ft}$ ?

b) ¿A qué razón cambia el radio del espejo de agua en ese instante?



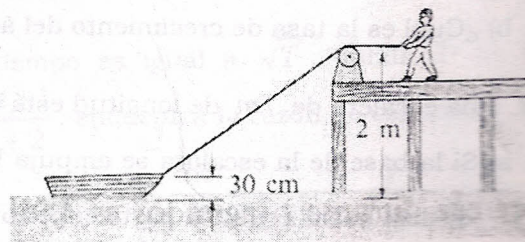
22. Un globo de aire caliente (para pasajeros) se eleva en forma vertical y una cuerda atada a la base del globo se va soltando a razón de  $\frac{3 \text{ m}}{2 \text{ s}}$ . El torno desde el cual se suelta la cuerda está a  $6 \text{ m}$  de la plataforma de abordaje. ¿Si se ha soltado  $150 \text{ m}$  de cuerda, con qué rapidez asciende el globo?

R:  $\frac{dy}{dt} = \frac{25\sqrt{39}}{104} \frac{\text{m}}{\text{s}}$



23. Un hombre que está en un muelle tira de un bote con cuerda atada a su proa, que se halla  $30 \text{ cm}$  sobre el nivel del agua. La cuerda pasa sobre una polea simple que se encuentra en el muelle a  $2 \text{ m}$  del agua. Se tira de la cuerda a razón de  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ¿con qué rapidez se acerca el bote al muelle en el momento en que la proa está a  $6 \text{ m}$  del punto sobre el agua que se encuentra directamente debajo de la polea.

R:  $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3889}}{60} \frac{\text{m}}{\text{s}}$



24. Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de  $90 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ , y el otro hacia el sur a  $60 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ , se dirigen hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué tasa se están aproximando uno al otro en el instante en el que el primer automóvil está a  $\frac{1}{5} \text{ km}$  de la intersección y el segundo se encuentra a  $\frac{3}{20} \text{ km}$  de dicha intersección?

R:  $\frac{dh}{dt} = 84 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$



## DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

A) Aplica las fórmulas para derivar las siguientes funciones trascendentales logarítmicas.

1.  $f(x) = \ln x$ .

R:  $f'(x) = \frac{1}{x}$

2.  $f(y) = \log(3-y)$ .

R:  $f'(y) = -\frac{1}{\ln 10(3-y)}$

3.  $f(t) = \log_4(t^2 + 2t)$ .

R:  $f'(t) = \frac{(t+1)}{\ln 2(t^2 + 2t)}$

4.  $f(r) = \log_2 3r - 3r^2$ .

R:  $f'(r) = \frac{1 - (6 \ln 2)r^2}{(\ln 2)r}$

5.  $f(s) = \log[s^3(4-s^2)^2]$ .

R:  $f'(s) = \frac{12 - 7s^2}{\ln 10(4s - s^3)}$

6.  $f(h) = \ln \frac{3}{h^2}$ .

R:  $f'(h) = -\frac{2}{h}$

7.  $f(y) = \log_5 \frac{y-5}{4y-y^3}$ .

R:  $f'(y) = \frac{20 + 2y^3 - 15y^2}{\ln 5(y-5)(4y-y^3)}$

8.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

R:  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

9.  $f(\gamma) = \ln(\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1)^3$ .

R:  $f'(\gamma) = \frac{12\gamma^3 - 18\gamma}{\gamma^4 - 3\gamma^2 + 1}$

10.  $f(\phi) = \ln^3(\phi^4 + 3\phi^2 + 1)$ .

R:  $f'(\phi) = \frac{(12\phi^3 - 18\phi)\ln^2(\phi^4 - 3\phi^2 + 1)}{\phi^4 - 3\phi^2 + 1}$

11.  $f(s) = \frac{4}{3s\sqrt{s}} + \ln s - \frac{1}{2s^2}$ .

R:  $f'(s) = \frac{s^2 - 2\sqrt{s} + 1}{s^3}$

12.  $f(x) = x^2 \log_7 x^3$ .

R:  $f'(x) = \frac{3x(1 + \ln x^2)}{\ln 7}$

13.  $f(\theta) = \frac{1}{\log \sqrt{\theta}}$ .

R:  $f'(\theta) = -\frac{\ln 100}{\theta \ln^2 \theta}$

14.  $f(y) = \ln[\ln(\ln y)]$ .

R:  $f'(y) = \frac{1}{y \ln y \ln(\ln y)}$

15.  $f(t) = \sqrt[3]{\log_2 \sqrt{2-t}}$ .

R:  $f'(t) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\ln 2}(12-6t)\sqrt[3]{\ln^2(2-6t)}}$

16.  $f(y) = \log_4 \frac{(y+4)(y-2)^2}{(y-3)^4}$ .

R:  $f'(y) = \frac{14 - 11y - y^2}{\ln 2(y^3 - y^2 - 14y + 24)}$

17.  $f(t) = (\ln t)(\log t)$ .

R:  $f'(t) = \frac{\ln 10 \log t + \ln t}{t \ln 10}$

18.  $f(\gamma) = \ln \frac{\sqrt[33]{(3\gamma-1)^{17}}}{\sqrt[11]{(2\gamma+3)^2}}$ .

R:  $f'(\gamma) = \frac{2\gamma + 5}{6\gamma^2 + 7\gamma - 3}$

19.  $f(x) = \log \sqrt{\frac{(3x+2)^5}{7-x^4}}$ .

R:  $f'(x) = \frac{105 - 27x^4 - 20x^3}{(42x - 6x^5 + 70 - 10x^4) \ln 10}$



$$20. f(y) = \ln \left[ (y^3 + 4)^6 \sqrt{5y - 1} \right].$$

$$R: f'(y) = \frac{185y^3 - 36y^2 + 20}{10y^4 - 2y^3 + 40y - 8}.$$

$$21. f(t) = \ln \sqrt[3]{\frac{(t-4)^{11}}{(t+2)^2}} - \frac{5t+16}{t^2-2t-8}.$$

$$R: f'(t) = \frac{3t^3 + 19t^2 - 12t - 72}{(t^2 - 2t - 8)^2}.$$

$$22. f(r) = \frac{3}{r-2} + \ln[r^2(r-2)].$$

$$R: f'(r) = \frac{3r^2 - 13r + 8}{r^3 - 4r^2 + 4r}.$$

$$23. f(h) = \frac{1}{2}(h+3)^2 + \ln(h-1)^6 + \frac{7-8h}{2(h-1)^2}.$$

$$R: f'(h) = \frac{h^4}{(h-1)^3}.$$

$$24. f(\gamma) = \ln \frac{1}{(\gamma+2)^3(\gamma-1)^4} - \frac{1}{\gamma-1}.$$

$$R: f'(\gamma) = \frac{-7\gamma^2 + 3\gamma + 7}{(\gamma+2)(\gamma-1)^2}.$$

$$25. f(s) = \ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) + \ln(s + \sqrt{s^2 + 1}).$$

$$R: f'(s) = \frac{2}{\sqrt{s^4 - 1}(\sqrt{s^2 + 1} - \sqrt{s^2 - 1})}.$$

$$26. f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$R: f'(x) = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$$27. x = \ln(y-1) - xy.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - 1}{xy - y - 1}.$$

$$28. \ln \frac{x}{y} + x^2y = 3.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = -\frac{y - 2x^2y^2}{x^3y - x}.$$

$$29. \ln xy^2 - x + y = 2.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y}{xy - 2y}.$$

$$30. y^2 = \ln xy.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2xy^2 + x}.$$

$$31. x - y^2 = \ln \frac{y}{x}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{xy + y}{x + 2xy^2}.$$

$$32. xy = \ln(x^2 - y^2).$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2y + y^3}{x^3 - x^2y + 2y}.$$

$$33. y^3 = \ln(x+y).$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3xy^2 + 3y^3 - 1}.$$

$$34. y + x = \ln xy^2.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{y - xy}{xy - 2x}.$$

$$35. x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2 + xy}{xy + y^2 - 1}.$$

$$36. \frac{x-y}{x+y} = \ln \frac{x+y}{x-y}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

B) Aplica las fórmulas para derivar las siguientes funciones trascendentales exponenciales.

$$1. f(x) = 4^x.$$

$$R: f'(x) = \ln 4(4^x).$$

$$2. f(r) = \frac{1}{e^r}.$$

$$R: f'(r) = -\frac{1}{e^r}.$$

$$3. f(y) = y^{-y}.$$

$$R: f'(y) = -\frac{1}{y^y}(1 + \ln y).$$



4.  $f(s) = 2 - 3^{3s-1}$ .

R:  $f'(s) = -(3^{3s-1}) \ln 27$ .

5.  $f(z) = z^{\sqrt{5}} 5^{\sqrt{z}}$ .

R:  $f'(z) = \frac{1}{2} z^{\sqrt{5}} 5^{\sqrt{z}} [\ln 5 (\sqrt{z}) + \sqrt{5}]$ .

6.  $f(\phi) = \frac{\ln^{\phi} 5}{1 + e^{\phi^2}}$ .

R:  $f'(\phi) = \frac{\phi \ln 5 [(1 + e^{\phi^2}) \ln(\ln 5) - 2\phi e^{\phi^2}]}{(1 + e^{\phi^2})^2}$ .

7.  $f(\theta) = \log(\theta^e e^{\theta})$ .

R:  $f'(\theta) = \frac{e + \theta}{\ln 10(\theta)}$ .

8.  $f(r) = r^{\ln r}$ .

R:  $f'(r) = r^{\ln r - 1} \ln r^2$ .

9.  $f(\phi) = \log_3 \frac{20^{\phi^2}}{\phi^4 - e^{\phi^2}}$ .

R:  $f'(\phi) = \frac{\ln 400(\phi^2)(\phi^4 - e^{\phi^2}) - 4\phi^3 - 2\phi e^{\phi^2}}{\ln 3(\phi^4 - e^{\phi^2})}$ .

10.  $f(h) = h^{\frac{1}{h}}$ .

R:  $f'(h) = h^{\frac{1}{h}-2} (1 - \ln h)$ .

11.  $f(y) = \sqrt{1 + 4^{-5y}}$ .

R:  $f'(y) = -\frac{\ln 32}{4^{5y} \sqrt{1 + 4^{-5y}}}$ .

12.  $f(\beta) = e^{\frac{\beta-2}{\beta+2}}$ .

R:  $f'(\beta) = \frac{4e^{\frac{\beta-2}{\beta+2}}}{(\beta+2)^2}$ .

13.  $f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ .

R:  $f'(z) = -\frac{4}{(e^z - e^{-z})^2}$ .

14.  $f(\gamma) = 3^{5\gamma} \log_4(\gamma^2 - 1)$ .

R:  $f'(\gamma) = \frac{3^{5\gamma} [2\gamma + 5 \ln 3(\gamma^2 - 1) \ln(\gamma^2 - 1)]}{\ln 4(\gamma^2 - 1)}$ .

15.  $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ .

R:  $f'(x) = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (1 + \ln \sqrt{x})$ .

16.  $f(s) = (2s+1)7^{(1-s)^4}$ .

R:  $f'(s) = 2(7^{(1-s)^4}) \left[ \ln 49(2s+1)(1-2)^3 7^{(1-s)^4} + 1 \right]$ .

17.  $f(m) = e^{m\sqrt{m^2+1}}$ .

R:  $f'(m) = \frac{e^{m\sqrt{m^2+1}} (2m^2 + 1)}{\sqrt{m^2 + 1}}$ .

18.  $f(\theta) = \ln \sqrt{e^{\theta} + e^{-\theta}}$ .

R:  $f'(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2(e^{\theta} + e^{-\theta})}$ .

19.  $f(x) = \frac{xe^x}{x + e^x}$ .

R:  $f'(x) = \frac{xe^x (xe^x - 1)}{(x + e^x)^2}$ .

20.  $f(s) = s^2 e^{\frac{s^2}{2}}$ .

R:  $f'(s) = \frac{2s - s^3}{e^{\frac{s^2}{2}}}$ .

21.  $f(\gamma) = e^{\sqrt{\ln(a\gamma^2 + b\gamma + c)}}$ .

R:  $f'(\gamma) = \frac{(2a\gamma + b)e^{\sqrt{\ln(a\gamma^2 + b\gamma + c)}}}{2(a\gamma^2 + b\gamma + c)\sqrt{\ln(a\gamma^2 + b\gamma + c)}}$ .

22.  $f(y) = \ln \sqrt{\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}}}$ .

R:  $f'(y) = -\frac{4}{e^{4y} - e^{-4y}}$ .

23.  $f(r) = 4^{2r} 4^{3r} 4^{4r}$ .

R:  $f'(r) = 18 \ln 2 (4^{9r})$ .



24.  $f(z) = e^{3z^2} \ln(z^2 + 1).$

R:  $f'(z) = \frac{2ze^{3z^2} [1 + (z^2 + 1) \ln(z^2 + 1)^3]}{(z^2 + 1)}.$

25.  $f(t) = (1 + e^{t^2}) \sqrt{1 + e^{t^2}}.$

R:  $f'(t) = 3te^{t^2} \sqrt{1 + e^{t^2}}.$

26.  $f(\beta) = \frac{\sqrt{e^\beta - 2}}{e^\beta - 4}.$

R:  $f'(\beta) = -\frac{e^{2\beta}}{2(e^\beta - 4)^2 \sqrt{e^\beta - 2}}.$

27.  $f(y) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2y}}}{e^y}.$

R:  $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2y}}}.$

28.  $f(y) = \ln \frac{e^y}{1 + \sqrt{1 - e^{2y}}}.$

R:  $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2y}}}.$

29.  $f(r) = \ln \sqrt[4]{1 - 2e^{-2r}} - \frac{\ln \sqrt{e^{2r} - 2}}{e^{2r}}.$

R:  $f'(r) = \frac{\ln(e^{2r} - 1)}{e^{2r}}.$

30.  $y = e^{x-y}.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y}}{1 - e^{x-y}}.$

31.  $y = 5^{xy}.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 5(y) 5^{xy}}{1 - \ln 5(y) 5^{xy}}.$

32.  $\ln y = x + e^y.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 - ye^y}.$

33.  $2y = 10^{(x+y)^2}.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 10(x+y) 10^{(x+y)^2}}{2 - \ln 10(x+y) 10^{(x+y)^2}}.$

34.  $e^x + e^y = y^2.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y - e^y}.$

35.  $x + y^2 = e^{\frac{x}{y}}.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{\frac{x}{y}} - y^2}{2y^3 + xe^{\frac{x}{y}}}.$

36.  $2^y = xy.$

R:  $y' = \frac{x}{\ln 2(2^y) - x}.$

37.  $y + e^y = \log x.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10(x)(1 + e^y)}.$

38.  $x^2 + y^2 = 4^x - 4^y.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \ln 2(4^x) - 2x}{2y + 2 \ln 2(4^y)}.$

39.  $\log_2 xy = \sqrt{2e^{xy} + 1}.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 2(xy^2) e^{xy} - y \sqrt{2e^{xy} + 1}}{x \sqrt{2e^{xy} + 1} - \ln 2(x^2 y) e^{xy}}.$

40.  $x^y = y^x.$

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$

C) Aplica las fórmulas para derivar las siguientes funciones trascendentales trigonométricas.

1.  $f(\theta) = \tan(\theta^2 - 3\theta).$

R:  $f'(\theta) = (2\theta - 3) \sec^2(\theta^2 - 3\theta).$

2.  $f(y) = \csc \sqrt{2-y}.$

R:  $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{2-y}} \csc \sqrt{2-y} \cot \sqrt{2-y}.$



$$3. f(t) = \operatorname{sen} \left[ t^3 (2t - t^2)^4 \right].$$

$$R: f'(t) = (14t^3 - 11t^4)(2t - t^2)^3 \cos \left[ t^3 (2t - t^2)^4 \right].$$

$$4. f(x) = \cos \left( \frac{2 - x^2}{2 + x^2} \right).$$

$$R: f'(x) = \frac{8x}{(2 + x^2)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{2 - x^2}{2 + x^2} \right).$$

$$5. f(r) = \sec(e^{\sqrt{r}}).$$

$$R: f'(r) = \frac{e^{\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}} \sec e^{\sqrt{r}} \tan e^{\sqrt{r}}.$$

$$6. f(\gamma) = \cot \left( \ln \frac{\gamma}{2} \right).$$

$$R: f'(\gamma) = -\frac{1}{\gamma} \csc^2 \left( \ln \frac{\gamma}{2} \right).$$

$$7. f(\beta) = \sec^3 \sqrt{\beta}.$$

$$R: f'(\beta) = \frac{3}{2\sqrt{\beta}} \sec^3 \sqrt{\beta} \tan \sqrt{\beta}.$$

$$8. f(\phi) = \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \sec \frac{\phi}{2}.$$

$$R: f'(\phi) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\phi}{2}.$$

$$9. f(\varphi) = 4\sqrt{\csc 2\varphi}.$$

$$R: f'(\varphi) = -4\sqrt{\csc 2\varphi} \cot 2\varphi.$$

$$10. f(\theta) = \frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\cos 6\theta}.$$

$$R: f'(\theta) = \frac{\cos \theta}{\cos^2 6\theta}.$$

$$11. f(h) = \log_4 \left( \cos \frac{2}{h^2} \right).$$

$$R: f'(h) = \frac{4}{\ln 4 (h^3)} \tan \frac{2}{h^2}.$$

$$12. f(z) = 5^{\operatorname{sen} z \cos z}.$$

$$R: f'(z) = \ln 5 (5^{\operatorname{sen} z \cos z}) \cos 2z.$$

$$13. f(\alpha) = (\csc 3\alpha - \cot 3\alpha)^2.$$

$$R: f'(\alpha) = 9 \csc 3\alpha (\csc 3\alpha - \cot 3\alpha)^3.$$

$$14. f(\theta) = \left( \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2.$$

$$R: f'(\theta) = \cos \theta.$$

$$15. f(\theta) = \ln \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$$R: f'(\theta) = -\tan 2\theta.$$

$$16. f(y) = \cot 2y + \frac{1}{3} \cot^3 2y.$$

$$R: f'(y) = -2 \csc^4 2y.$$

$$17. f(t) = \operatorname{sen}^2 \frac{t^3}{4} - \cos^2 \frac{t^3}{4}.$$

$$R: f'(t) = \frac{3}{2} t^2 \operatorname{sen} \frac{t^3}{2}.$$

$$18. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}.$$

$$R: f'(x) = \sec x.$$

$$19. f(r) = \ln [\sqrt{1 - \cos r} \sqrt{1 + \cos r}].$$

$$R: f'(r) = \cot r.$$

$$20. f(\gamma) = \ln \sqrt{\csc e^{2\gamma} - \cot e^{2\gamma}}.$$

$$R: f'(\gamma) = e^{2\gamma} \csc e^{2\gamma}.$$

$$21. f(\beta) = \beta - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{4}.$$

$$R: f'(\beta) = 1 - \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}.$$

$$22. f(\phi) = \ln \sqrt[3]{\sec^2 3\phi} - \frac{1}{3} \tan^2 3\phi.$$

$$R: f'(\phi) = -2 \tan^3 3\phi.$$

$$23. f(\varphi) = -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi.$$

$$R: f'(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi.$$

$$24. f(s) = \ln [\operatorname{sen} s (\csc s - \cot s)].$$

$$R: f'(s) = \frac{\operatorname{sen} s}{1 - \cos s}.$$

$$25. f(h) = -\cot 4h - 4h.$$

$$R: f'(h) = 4 \cot 4h.$$

$$26. f(z) = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^8 2z}.$$

$$R: f'(z) = \operatorname{sen} 4z \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 2z}.$$

$$27. f(\alpha) = \tan 2\alpha + \sec 2\alpha.$$

$$R: f'(\alpha) = 2 \sec 2\alpha (\sec 2\alpha + \tan 2\alpha).$$



28.  $f(\theta) = \theta - \tan \theta + \sec \theta$ .

R:  $f'(\theta) = -\tan \theta (\tan \theta + \sec \theta)$ .

29.  $f(y) = \ln \sqrt{\ln(\tan y)}$ .

R:  $f'(y) = \frac{1}{\sin 2y \ln(\tan y)}$ .

30.  $f(t) = \tan t - \cot t$ .

R:  $f'(t) = 2 \csc^2 2t$ .

31.  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x$ .

R:  $f'(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ .

32.  $f(r) = \ln \sqrt{\csc r - \cot r} - \frac{1}{2} \csc r \cot r$ .

R:  $f'(r) = \csc^3 r$ .

33.  $f(\gamma) = \tan \frac{\gamma}{2} \sec \frac{\gamma}{2} + \ln \left( \tan \frac{\gamma}{2} + \sec \frac{\gamma}{2} \right)$ .

R:  $f'(\gamma) = \sec^3 \frac{\gamma}{2}$ .

34.  $f(\beta) = \frac{1}{5}(2 \sin 2\beta \cos 3\beta - 3 \sin 3\beta \cos 2\beta)$ .

R:  $f'(\beta) = -\cos 3\beta \cos 2\beta$ .

35.  $f(\phi) = -\frac{\phi^2}{4} \cos 2\phi + \frac{\phi}{4} \sin 2\phi + \frac{1}{8} \cos 2\phi$ .

R:  $f'(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 \sin 2\phi$ .

36.  $x + y = \cos xy$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \sin xy + 1}{1 + x \sin xy}$ .

37.  $\sec^2 x + \csc^2 y = 4$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x \tan x}{\csc^2 y \cot y}$ .

38.  $xy = \sin(x + y)$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x + y) - y}{x - \cos(x + y)}$ .

39.  $x \sin y - y \cos x = 1$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y \cos x}{x \cos y - \cos x}$ .

40.  $xy = \cos e^{xy}$ .

R:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + ye^{xy} \sin e^{xy}}{x + xe^{xy} \sin e^{xy}}$ .

D) Aplica las fórmulas para derivar las siguientes funciones trascendentales trigonométricas inversas.

1.  $f(x) = \arcsin(5x - 1)$ .

R:  $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{2x - 5x^2}}$ .

2.  $f(y) = \arctan \frac{1}{y}$ .

R:  $f'(y) = -\frac{1}{y^2 + 1}$ .

3.  $f(h) = \operatorname{arccsc} \frac{h}{4}$ .

R:  $f'(h) = -\frac{4}{h\sqrt{h^2 - 16}}$ .

4.  $f(r) = \operatorname{arccot} \frac{r-1}{r+1}$ .

R:  $f'(r) = -\frac{1}{r^2 + 1}$ .

5.  $f(t) = \arccos \sqrt{1 - 3t^2}$ .

R:  $f'(t) = \frac{3}{\sqrt{1 - 3t^2}}$ .

6.  $f(\gamma) = \arctan \left( \ln \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \right)$ .

R:  $f'(\gamma) = -\frac{1}{2\gamma \left( 1 + \ln^2 \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \right)}$ .

7.  $f(\alpha) = \operatorname{arcsec}^3(e^{\alpha^2})$ .

R:  $f'(\alpha) = \frac{6\alpha \operatorname{arcsec}^2(e^{\alpha^2})}{\sqrt{e^{\alpha^2} - 1}}$ .

8.  $f(\beta) = \frac{\arcsin 2\beta}{\arccos 2\beta}$ .

R:  $df(\beta) = \frac{2(\arccos 2\beta + \arcsin 2\beta)}{\sqrt{1 - 4\beta^2} \arccos^2 2\beta} d\beta$ .



$$9. f(\theta) = \arcsen(\cos 4\theta).$$

$$R: f'(\theta) = -4.$$

$$10. f(\varphi) = \arcsen \varphi \arccsc \varphi.$$

$$R: f'(\varphi) = \frac{\arccsc \varphi - \arcsen \varphi}{\varphi \sqrt{\varphi^2 - 1}}.$$

$$11. f(x) = \ln[\arccsc \sqrt{\sen x}].$$

$$R: f'(x) = \frac{\cot x}{2\sqrt{\sen x - 1} \arccsc \sqrt{\sen x}}.$$

$$12. f(y) = 6^{\frac{1}{2} \arccot \frac{y^3}{2}}.$$

$$R: f'(y) = -\frac{\ln 6 (3y^2) 6^{\frac{1}{2} \arccot \frac{y^3}{2}}}{4 + y^6}.$$

$$13. f(h) = \ln \left[ \cos \left( e^{\arcsen \frac{1}{h}} \right) \right].$$

$$R: f'(h) = \frac{e^{\arcsen \frac{1}{h}} \tan \left( e^{\arcsen \frac{1}{h}} \right)}{h \sqrt{h^2 - 1}}.$$

$$14. f(\theta) = -\arcsen \frac{1}{e^\theta}.$$

$$R: f'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta} - 1}}.$$

$$15. f(\beta) = \arcsen e^\beta.$$

$$R: f'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{e^{2\beta} - 1}}.$$

$$16. f(\alpha) = \arctan \sqrt{e^{2\alpha} - 1}.$$

$$R: f'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{e^{2\alpha} - 1}}.$$

$$17. f(r) = \frac{\arcsen 2r}{\sqrt{r}}.$$

$$R: f'(r) = \frac{2 - \sqrt{4r^2 - 1} \arcsen 2r}{2r \sqrt{4r^3 - r}}.$$

$$18. f(t) = \sqrt{1 - e^{2t}} \arccos e^t.$$

$$R: f'(t) = \frac{e^t [\sqrt{1 - e^{2t}} + e^t \arccos e^t]}{\sqrt{1 - e^{2t}}}.$$

$$19. f(\theta) = \arccot \frac{a \sen \theta}{3 + 5 \sen \theta}.$$

$$R: f'(\theta) = -\frac{3}{(3 + 5 \sen \theta)^2 + a^2 \sen \theta}.$$

$$20. f(\gamma) = \arcsen \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \arccsc \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

$$R: f'(\gamma) = -\frac{2}{(\gamma + 1) \sqrt{\gamma}}.$$

$$21. f(\alpha) = \arcsen(e^{\sen \alpha}).$$

$$R: f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{e^{2 \sen \alpha} - 1}}.$$

$$22. f(\beta) = \frac{\sqrt{\beta^2 - a^2}}{a} - \frac{1}{a} \arccsc \frac{\beta}{a}.$$

$$R: f'(\beta) = \frac{\beta^2 - a}{a \beta \sqrt{\beta^2 - a^2}}.$$

$$23. f(\varphi) = \varphi \arcsen \varphi + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1}).$$

$$R: f'(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\varphi^2 - 1}}.$$

$$24. f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3}.$$

$$R: f'(x) = \sqrt{9 - x^2}.$$

$$25. f(y) = \sqrt{y^2 - 4} - 2 \arctan \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

$$R: f'(y) = \frac{2y^2 - 1}{2y \sqrt{y^2 - 4}}.$$

$$26. f(h) = \frac{2h}{h^2 + 4} + \arccot \frac{h}{2}.$$

$$R: df(h) = -\frac{4h^2 dh}{h^2 + 4}.$$

$$27. f(r) = r \arccos 2r - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4r^2}.$$

$$R: f'(r) = \arccos 2r.$$

$$28. f(\gamma) = 76 \arcsen \left( \frac{\sqrt{5}(\gamma - 9)}{5} \right) - 8 \sqrt{18\gamma - \gamma^2 - 76}.$$

$$R: f'(\gamma) = \frac{4 + 6\gamma}{\sqrt{18\gamma - \gamma^2 - 76}}.$$



$$29. f(t) = \frac{5}{4}\sqrt{12t - 4t^2 - 8} - \frac{11}{4}\arcsen(2t - 3).$$

$$30. f(\phi) = \phi + \ln(\phi^2 - 4\phi + 13)^2 - \frac{5}{3}\arctan\left(\frac{\phi - 2}{3}\right).$$

$$31. f(\phi) = \ln \frac{1}{\sqrt[3]{(9\phi^2 - 30\phi + 27)}} - \frac{5\sqrt{2}}{18}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}(3\phi - 5)}{2}\right).$$

$$32. y - x = \arcsen y.$$

$$33. \arctan y = x^2 + y^2.$$

$$34. \arccos xy = e^{x+y}.$$

$$35. \ln(x + y) = \arctan xy.$$

$$36. y^2 + y \arcsen x = xe^y.$$

$$37. \arccsc \frac{y}{x} = \arccsc(x + y).$$

$$38. \ln(x^2 + y^2) + 2\arctan \frac{x}{y} = 0.$$

$$39. \arccos y + x = xy.$$

$$40. \operatorname{arccot}(x + y) = \arcsen(e^y + x).$$

$$R: f'(t) = \frac{2 - 5t}{\sqrt{12t - 4t^2 - 8}}.$$

$$R: f'(\phi) = \frac{\phi^2}{\phi^2 - 4\phi + 13}.$$

$$R: f'(\phi) = \frac{5 - 4\phi}{9\phi^2 - 30\phi + 27}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - y^2} - 1}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2xy^2}{1 - 2y + 2y^3}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - x^2y^2} e^{x+y} - y}{x - \sqrt{1 - x^2y^2} e^{x+y}}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 - 1 - x^2y^2}{1 + x^2y^2 - xy - y^2}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - x^2} e^y + y}{\sqrt{1 - x^2} (2y + \arcsen x - xe^y)}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{xy\sqrt{x^2 - y^2} - y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2\sqrt{x^2 - y^2} + xy\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - y^2}}{x\sqrt{1 - y^2} + 1}.$$

$$R: \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \sqrt{1 - (e^y + x)^2} + (x + y)^2}{e^y + (x + y)^2 e^y + \sqrt{1 - (e^y + x)^2}}.$$



## GRAFICACIÓN DE FUNCIONES POLINOMIALES

Bosqueja la gráfica de las siguientes funciones algebraicas y reporta: a) Puntos máximos y puntos mínimos relativos o absolutos. b) Puntos de inflexión. c) Intervalos donde la función es creciente y decreciente. d) Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. e) Los puntos de intercepción con los ejes de coordenadas. (Solución en la pág. 61).

$$1. f(x) = x - 6.$$

$$2. f(x) = 4 - \frac{2}{3}x.$$

$$3. f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2 - 9.$$

$$4. f(x) = x^2 + 4x.$$

$$5. f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

$$6. f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 1.$$

$$7. f(x) = x^3 - 3x.$$

$$8. f(x) = x^3 - x^2.$$

$$9. f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

$$10. f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

$$11. f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5.$$

$$12. f(x) = 3x - x^3.$$

$$13. f(x) = x^2 - x^3.$$

$$14. f(x) = 6x^2 - x^3 - 9x.$$

$$15. f(x) = 6x - \frac{3}{2}x^2 - x^3.$$

$$16. f(x) = 5 + 5x - x^2 - x^3.$$

$$17. f(x) = \frac{x^4}{8} + x^2.$$

$$18. f(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$$



19.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ .      20.  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ .      21.  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ .  
 22.  $f(x) = -\frac{x^4}{8} - x^2$ .      23.  $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ .      24.  $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3x^4$ .  
 25.  $f(x) = x^3 - x^4 - 5x + 3x^2 + 2$ .      26.  $f(x) = 4x^3 - x^4 - 4x^2 - 1$ .      27.  $f(x) = 3x^5 + 5x^3$ .  
 28.  $f(x) = x^5 - 5x$ .      29.  $f(x) = x^5 - 2x^4$ .      30.  $f(x) = 3x^5 + 5x^4$ .  
 31.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ .      32.  $f(x) = -3x^5 - 5x^3$ .      33.  $f(x) = 5x - x^5$ .  
 34.  $f(x) = 2x^4 - x^5$ .      35.  $f(x) = -3x^5 - 5x^4$ .      36.  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ .

## OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

1. Obtén las dimensiones del rectángulo con área máxima si su perímetro es  $18m$ .      R:  $l = \frac{9}{2}m$ ,  $a = \frac{9}{2}m$ .
2. El producto de dos números es 7. Determina sus valores, tal que la suma sea mínima.      R:  $x = \sqrt{7}$ ,  $y = \sqrt{7}$ .
3. Divide el número 120 en dos partes, tales que el producto de una parte por el cuadrado de la otra sea máximo.      R:  $x = 40$ ,  $y = 80$ .
4. Obtén las dimensiones del rectángulo con la mayor área posible que está inscrito en un círculo cuyo radio es la unidad.      R:  $l = \sqrt{2}$ ,  $a = \sqrt{2}$ .
5. Un alambre de  $4m$  de longitud, se corta en dos secciones y se doblan para formar un cuadrado y un círculo; determina las dimensiones de cada figura para que la suma de sus áreas sea: a) Mínima y b) Máxima.      R:  $l = \frac{4\pi}{1+\pi}m$ ,  $r = \frac{4}{1+\pi}$ .
6. Se desea cercar un prado rectangular coronado por un semicírculo en una de sus bases. Se cuenta con  $100m$  de alambre para tal fin. ¿Cuáles son las dimensiones del prado para que su área se máxima?      R:  $l = \frac{200}{4+\pi}m$ ,  $a = \frac{100}{4+\pi}m$ ,  $r = \frac{100}{4+\pi}m$ .
7. Se ha diseñado un jardín rectangular con  $72m^2$  de superficie, rodeado de un andador de concreto de  $1m$  de ancho en los lados mayores y de otro de  $2m$  de ancho en los lados menores. Se desea que la superficie total del prado y del andador sea mínima. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?      R:  $l = 12m$ ,  $a = 6m$ .
8. Una esfera tiene radio que mide  $3m$ , calcula las dimensiones que debe tener un cono circular recto de volumen máximo inscrito a la esfera.      R:  $r = 2\sqrt{2}m$ ,  $h = 4m$ .
9. Se inscribirá un cilindro en una esfera de radio igual a  $10in$ . ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que tenga el máximo volumen posible?      R:  $h = \frac{20}{3}\sqrt{3}in$ ,  $r = \frac{10}{3}\sqrt{6}in$ .
10. Obtén los puntos de la curva dada por la ecuación  $y = 4 - x^2$  que se encuentran a la mínima distancia del punto  $P(0,2)$ .      R:  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{2}\right)$ ,  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{2}\right)$ .
11. Se va construir una caja abierta recortando cuadrados de las esquinas de una pieza rectangular de cartón y doblando después los lados hacia arriba. Si la pieza de cartón es de  $12 \times 24cm$ . ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen construida de esta manera?      R:  $x = 6 - 2\sqrt{3}cm$ .



12. Un granjero desea construir un galpón de forma rectangular para gallinas, uno de sus lados será el muro trasero de su casa. Los otros tres lados serán cercados con malla de alambre. Hay 96m de malla de alambre disponible. ¿Qué dimensiones de la cerca harán que el área encerrada sea máxima? R:  $b = 48m$ ,  $a = 24m$ .

13. Un cono circular recto está inscrito en una esfera de radio igual a 8cm, obtén las dimensiones del cono sabiendo que tiene el mayor volumen posible. R:  $r = 8\sqrt{2}cm$ ,  $h = 32cm$ .

14. Se va construir un corral doble que forma dos rectángulos idénticos adyacentes. Si se dispone de 120m de malla de alambre, ¿qué dimensiones harán que el área del corral sea máxima? R:  $a = 20m$ ,  $b = 30m$ .

15. Se supone que la tos humana incrementa el flujo de aire hacia los pulmones, desplazando partículas que bloquean la tráquea y cambian su radio. Supón que la tráquea que no está bajo presión tiene radio  $r_0$ . La velocidad del aire a través de la tráquea es aproximadamente  $V(r) = cr^2(r_0 - r)$ , para alguna constante  $c$ . Calcula el radio que maximice la velocidad del aire a través de la tráquea. ¿Significa que la tráquea tiene mayor o menor radio que  $r_0$ ? R:  $r_2 = \frac{2}{3}r_0$ .

16. Un volante consiste en un papel rectangular impreso con márgenes de 2cm a los lados y 4cm arriba y abajo. Si el área de la región impresa mide  $38cm^2$ . ¿Qué dimensiones tendrá el aviso para minimizar el área total del papel? R:  $b = 4 + \sqrt{19}$ ,  $h = 8 + 2\sqrt{19}$ .

17. Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga un volumen de 200ml. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que la que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación. R:  $r = 2\sqrt[3]{\frac{25}{3\pi}}$ .

18. Un cartel consiste es una cartulina rectangular impresa con márgenes de 2cm a los lados y de 3cm arriba y abajo. Si el área de la cartulina es de  $480cm^2$ , ¿Qué dimensiones tendrá el cartel para maximizar el área de la región impresa? R:  $b = 8\sqrt{5}$ ,  $h = 12\sqrt{5}$ .

19. En una reacción química autocatalítica, el producto formado actúa como catalizador para la reacción. Si  $Q_0$  es la cantidad de la sustancia original y  $x$  es la cantidad del catalizador formado, el ritmo o velocidad de la reacción química es  $\frac{dQ}{dx} = kx(Q_0 - x)$ , donde  $k$  es constante. ¿Para qué valor de  $x$  la velocidad de la reacción química será la máxima? R:  $x = \frac{Q_0}{2}$ .

20. Dos postes, uno de 12ft de altura y el otro de 28ft, están separados 30ft de distancia. Se sostienen por 2 cables conectados a una sola estaca colocada entre ellos desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde se colocará la estaca para que use la menor cantidad de cable? R: 9ft del poste de 12ft.

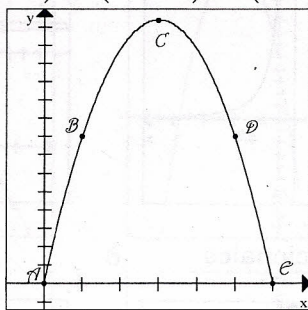


# ACADEMIA DE MATEMÁTICAS 2013

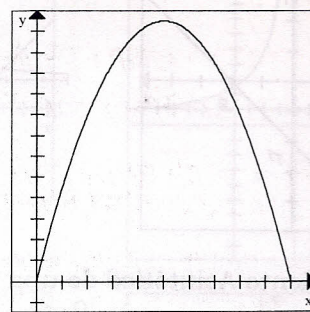
## SOLUCIONES GRÁFICAS

A) Problemas de aplicación de las funciones.

3. R: c)  $A(0,0)$ ,  $B(1,80)$ ,  $C(3,144)$ ,  $D(5,80)$ ,  $E(6,0)$ .

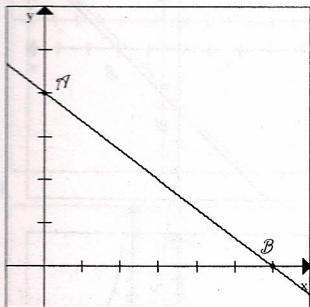


10. R: c)

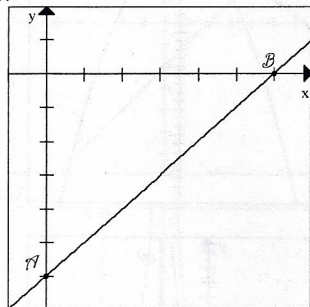


B) Dominio y Rango. Gráficas de funciones.

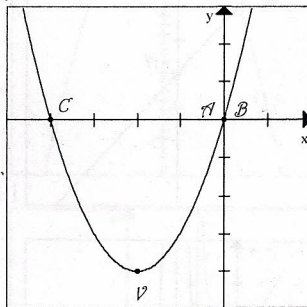
1.



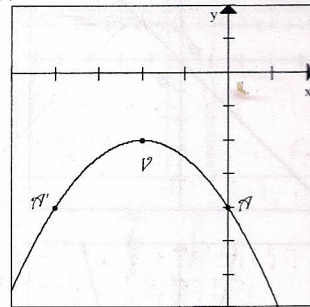
2.



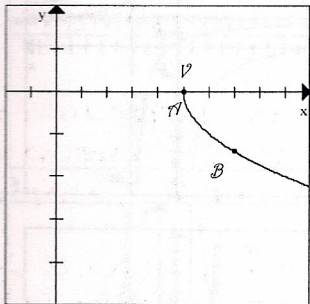
3.



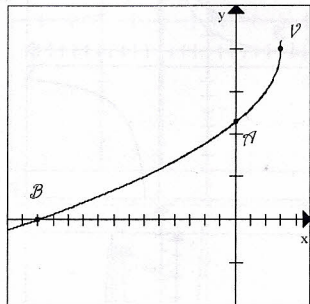
4.



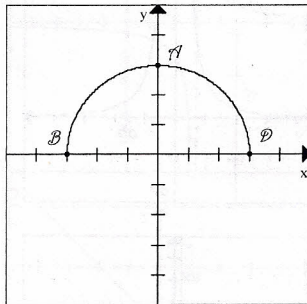
5.



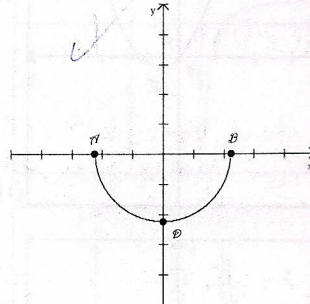
6.



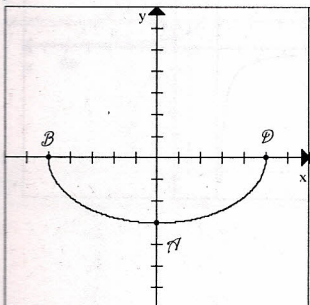
7.



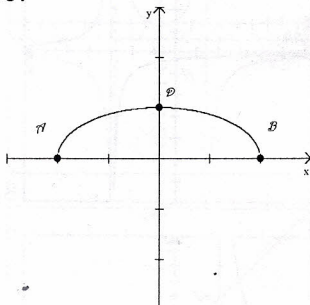
8.



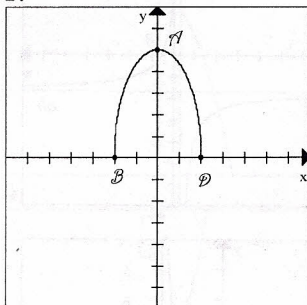
9.



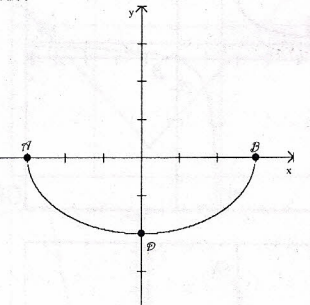
10.



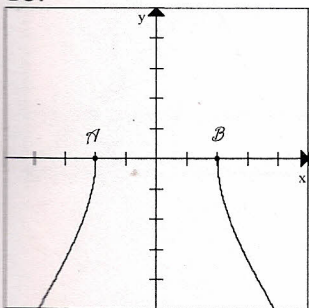
11.



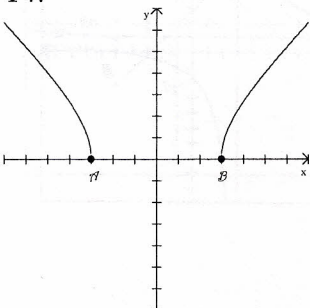
12.



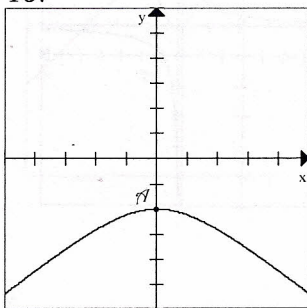
13.



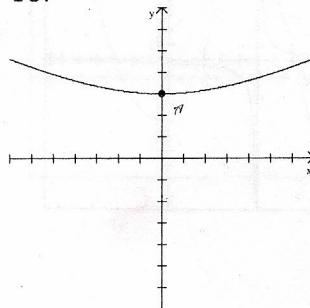
14.



15.

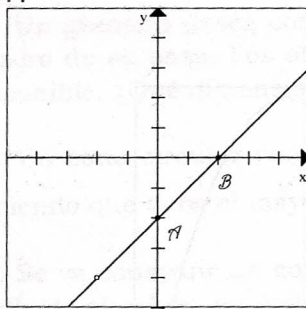


16.

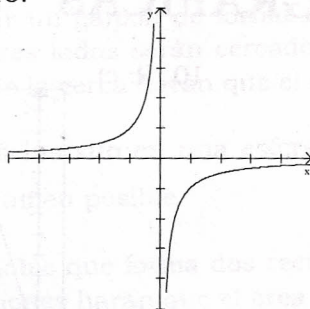




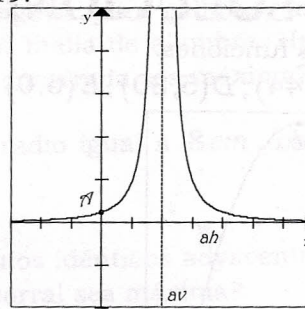
17.



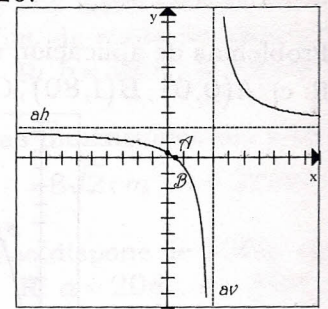
18.



19.

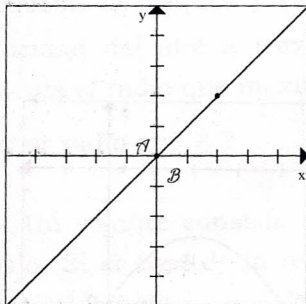


20.

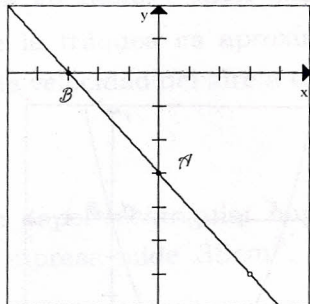


Comportamiento Asintótico de una función. Gráficas de funciones racionales

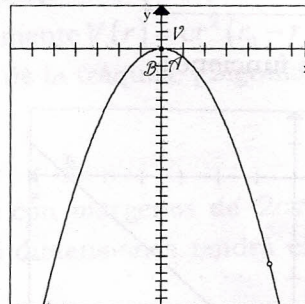
1.



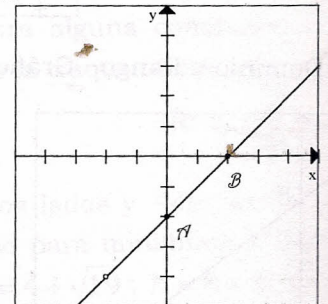
2.



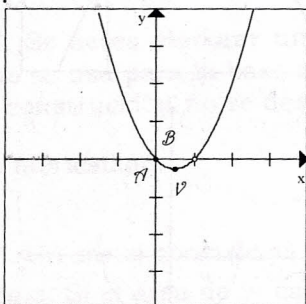
3.



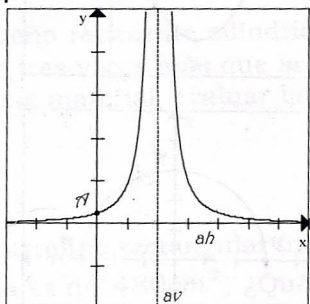
4.



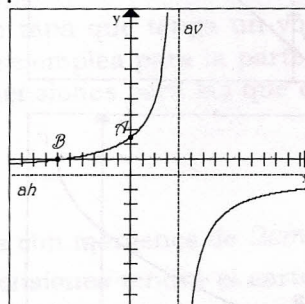
5.



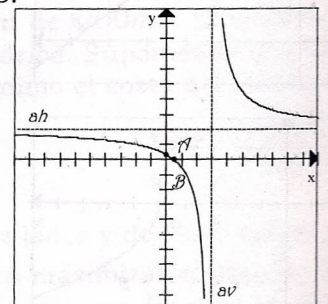
6.



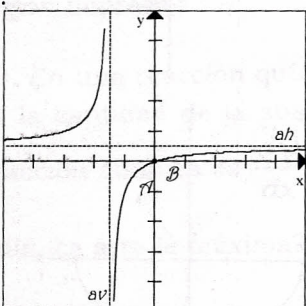
7.



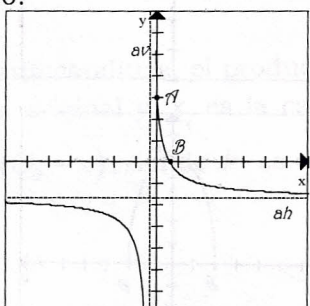
8.



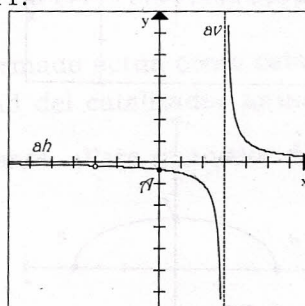
9.



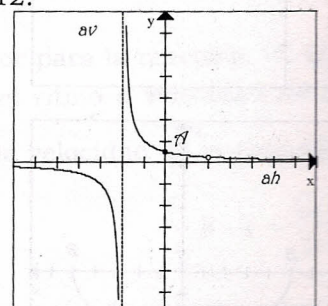
10.



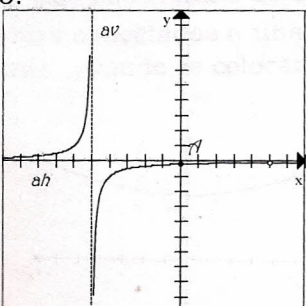
11.



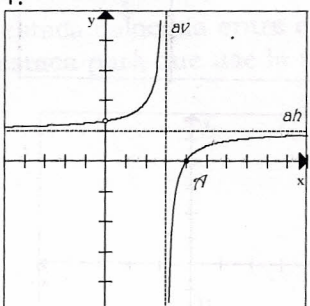
12.



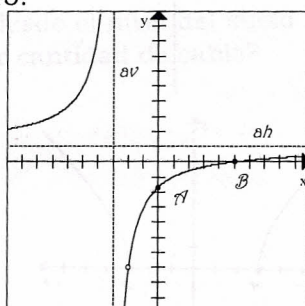
13.



14.

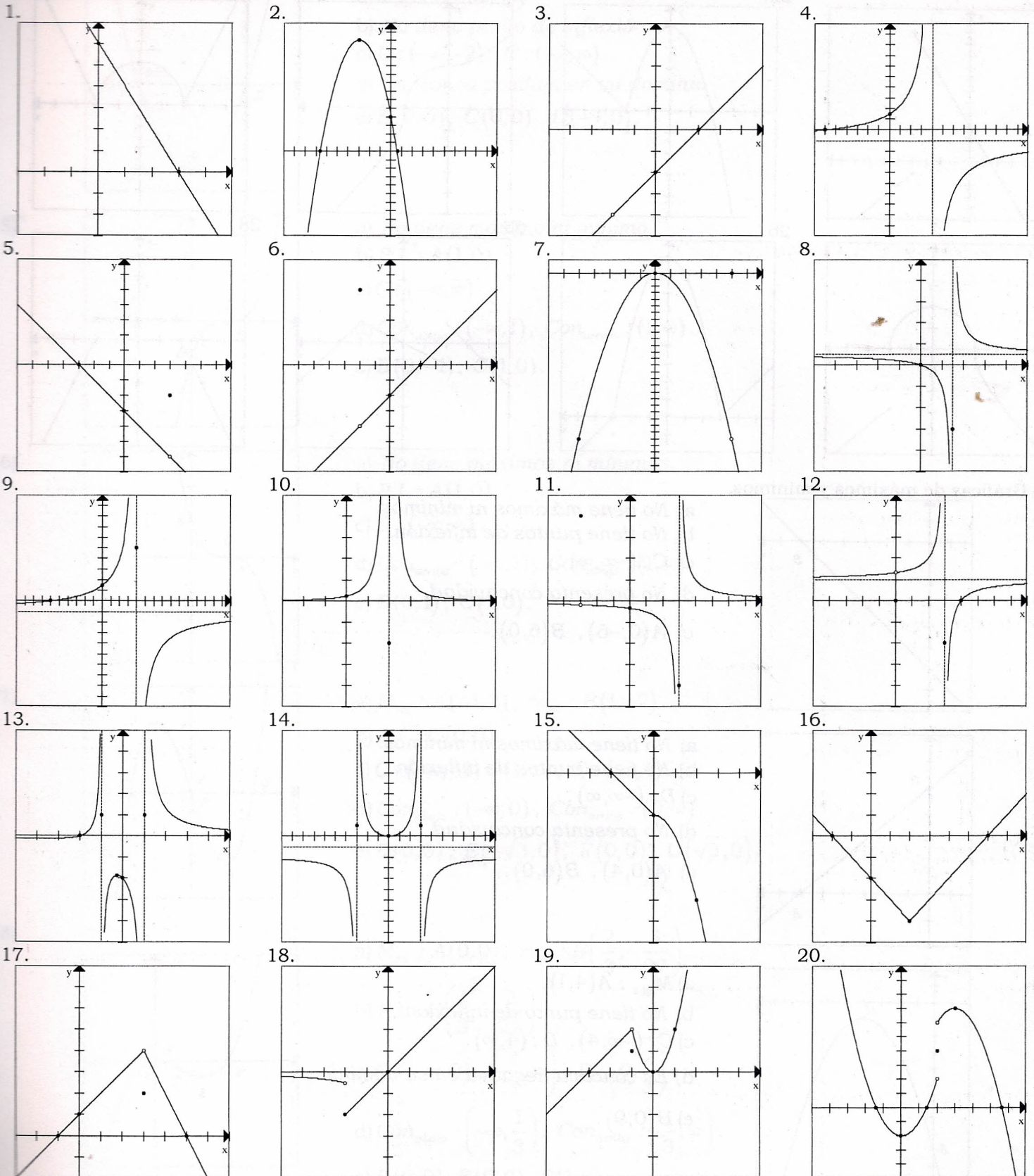


15.



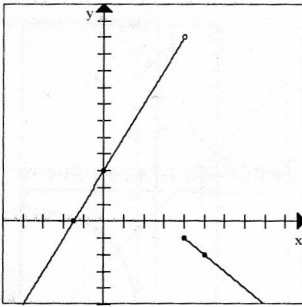


## Continuidad de una Función.

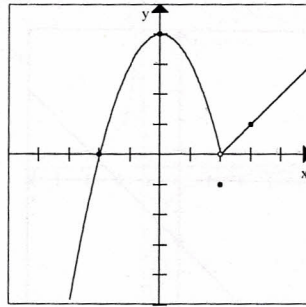




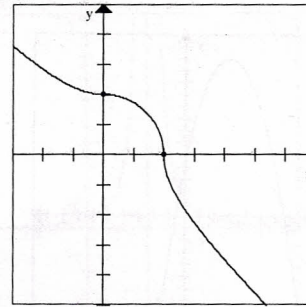
21.



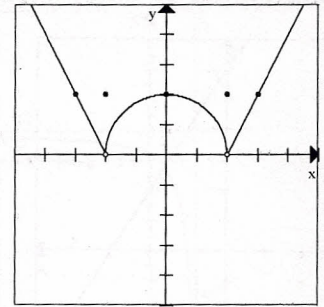
22.



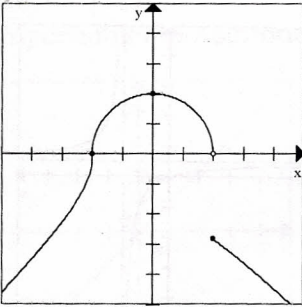
23.



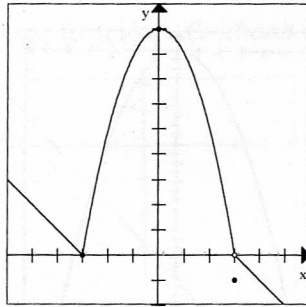
24.



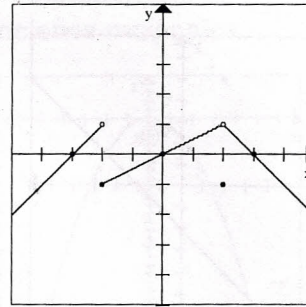
25.



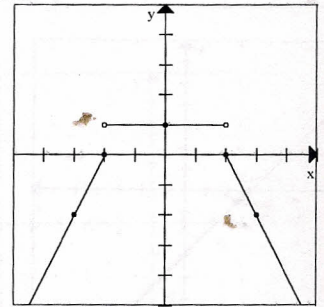
26.



27.

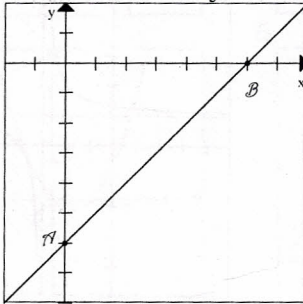


28.



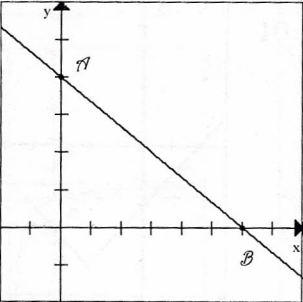
E) Gráficas de máximos y mínimos.

1)



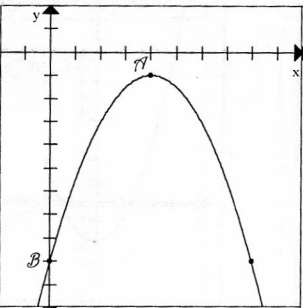
- a) No tiene máximos ni mínimos.
- b) No tiene puntos de inflexión.
- c)  $C : (-\infty, \infty)$ .
- d) No presenta concavidad.
- e)  $A(0, -6)$ ,  $B(6, 0)$ .

2)



- a) No tiene máximos ni mínimos.
- b) No tiene puntos de inflexión.
- c)  $D : (-\infty, \infty)$ .
- d) No presenta concavidad.
- e)  $A(0, 4)$ ,  $B(6, 0)$ .

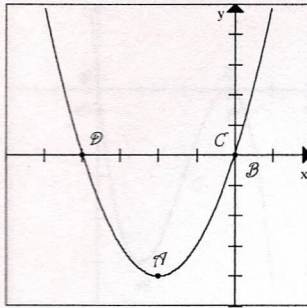
3)



- a)  $M_{abs} : A(4, 1)$ .
- b) No tiene punto de inflexión.
- c)  $C : (-\infty, 4)$ ,  $D : (4, \infty)$ .
- d) Es cóncava negativa en su dominio.
- e)  $B(0, 9)$ .

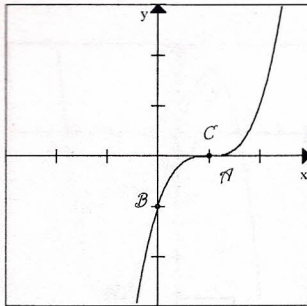


4)



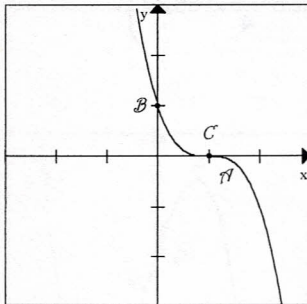
- a)  $m_{abs} : A(-2, -4)$ .
- b) No tiene punto de inflexión.
- c)  $D : (-\infty, -2)$ ,  $C : (-2, \infty)$ .
- d) Es cóncava positiva en su dominio
- e)  $B(0, 0)$ ,  $C(0, 0)$ ,  $D(-4, 0)$ .

5)



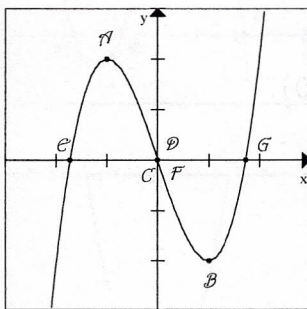
- a) No tiene máximo ni mínimo.
- b) P.I. :  $A(1, 0)$ .
- c)  $C : (-\infty, \infty)$ .
- d)  $Con_{abajo} : (-\infty, 1)$ ,  $Con_{arriba} : (1, \infty)$ .
- e)  $B(0, -1)$ ,  $C(1, 0)$ .

6)



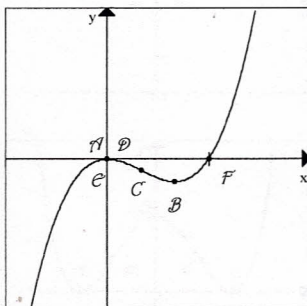
- a) No tiene máximos ni mínimos.
- b) P.I. :  $A(1, 0)$ .
- c)  $D : (-\infty, \infty)$ .
- d)  $Con_{arriba} : (-\infty, 1)$ ,  $Con_{abajo} : (1, \infty)$ .
- e)  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 0)$ .

7)



- a)  $M_{rel} : A(-1, 2)$ ,  $m_{rel} : B(1, -2)$ .
- b) P.I. :  $C(0, 0)$ .
- c)  $C : (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ,  $D : (-1, 1)$ .
- d)  $Con_{abajo} : (-\infty, 0)$ ,  $Con_{arriba} : (0, \infty)$ .
- e)  $D(0, 0)$ ,  $E(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $F(0, 0)$ ,  $G(\sqrt{3}, 0)$ .

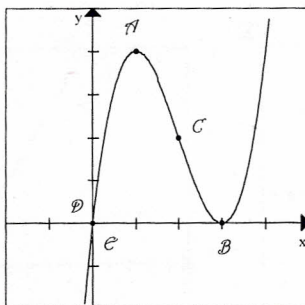
8)



- a)  $M_{rel} : A(0, 0)$ ,  $m_{rel} : B\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ .
- b) P.I. :  $C\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$ .
- c)  $C : (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ ,  $D : \left(0, \frac{2}{3}\right)$ .
- d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ ,  $Con_{arriba} : \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ .
- e)  $D(0, 0)$ ,  $E(0, 0)$ ,  $F(1, 0)$ .

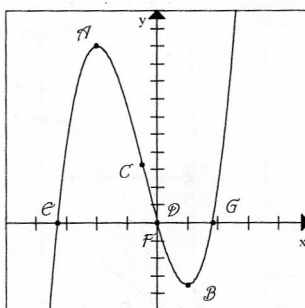


9)



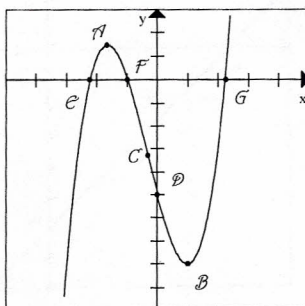
- a)  $M_{rel} : A(1,4)$ ,  $m_{rel} : B(3,0)$ .  
 b)  $P.I. : C(2,2)$ .  
 c)  $C : (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ,  $D : (1, 3)$ .  
 d)  $Con_{abajo} : (-\infty, 2)$ ,  $Con_{arriba} : (2, \infty)$ .  
 e)  $D(0,0)$ ,  $E(0,0)$ ,  $F(3,0)$ .

10)



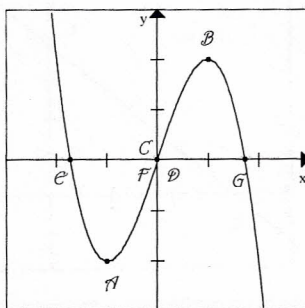
- a)  $M_{rel} : A(-2,10)$ ,  $m_{rel} : B(1, -\frac{7}{2})$ .  
 b)  $P.I. : C(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4})$ .  
 c)  $C : (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ ,  $D : (-2, 1)$ .  
 d)  $Con_{abajo} : (-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $Con_{arriba} : (-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
 e)  $D(0,0)$ ,  $E(-\frac{3+\sqrt{105}}{4}, 0)$ ,  $F(0,0)$ ,  $G(-\frac{-3+\sqrt{105}}{4}, 0)$ .

11)



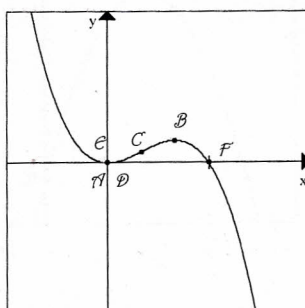
- a)  $M_{rel} : A(-\frac{5}{3}, \frac{40}{27})$ ,  $m_{rel} : B(1, -8)$ .  
 b)  $P.I. : C(-\frac{1}{3}, -\frac{88}{27})$ .  
 c)  $C : (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (1, \infty)$ ,  $D : (-\frac{5}{3}, 1)$ .  
 d)  $Con_{abajo} : (-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $Con_{arriba} : (-\frac{1}{3}, \infty)$ .  
 e)  $D(0, -5)$ ,  $E(-\sqrt{5}, 0)$ ,  $F(-1, 0)$ ,  $G(\sqrt{5}, 0)$ .

12)



- a)  $m_{rel} : A(-1, -2)$ ,  $M_{rel} : B(1, 2)$ .  
 b)  $P.I. : C(0, 0)$ .  
 c)  $D : (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ,  $C : (-1, 1)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, 0)$ ,  $Con_{abajo} : (0, \infty)$ .  
 e)  $D(0, 0)$ ,  $E(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $F(0, 0)$ ,  $G(\sqrt{3}, 0)$ .

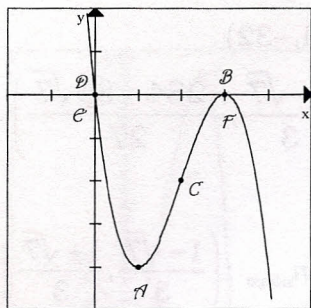
13)



- a)  $m_{rel} : A(0, 0)$ ,  $M_{rel} : B(\frac{2}{3}, \frac{4}{27})$ .  
 b)  $P.I. : C(\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$ .  
 c)  $D : (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ ,  $C : (0, \frac{2}{3})$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, \frac{1}{3})$ ,  $Con_{abajo} : (\frac{1}{3}, \infty)$ .  
 e)  $D(0, 0)$ ,  $E(0, 0)$ ,  $F(1, 0)$ .

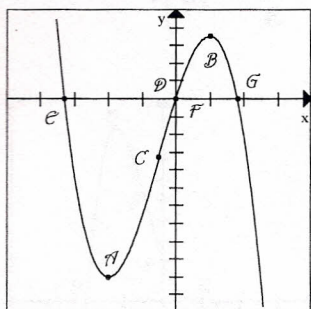


14)



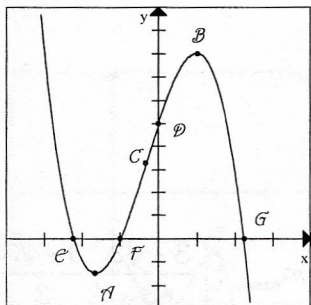
- a)  $m_{rel} : A(1, -4), M_{rel} : B(3, 0)$ .  
 b)  $P.I. : C(2, -2)$ .  
 c)  $D : (-\infty, 1) \cup (3, \infty), C : (1, 3)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, 2), Con_{abajo} : (2, \infty)$ .  
 e)  $D(0, 0), E(0, 0), F(3, 0)$ .

15)



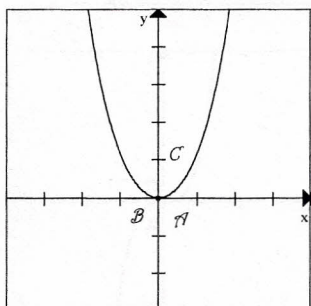
- a)  $m_{rel} : A(-2, -10), M_{rel} : B(1, \frac{7}{2})$ .  
 b)  $P.I. : C(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4})$ .  
 c)  $D : (-\infty, -2) \cup (1, \infty), C : (-2, 1)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, -\frac{1}{2}), Con_{abajo} : (-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
 e)  $D(0, 0), E(-\frac{3 + \sqrt{105}}{4}, 0), F(0, 0), G(\frac{-3 + \sqrt{105}}{4}, 0)$ .

16)



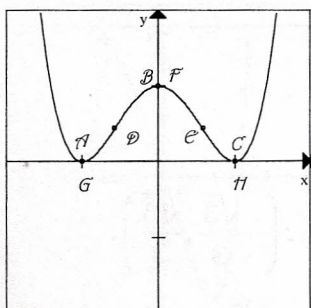
- a)  $m_{rel} : A(-\frac{5}{3}, -\frac{40}{27}), M_{rel} : B(1, 8)$ .  
 b)  $P.I. : C(-\frac{1}{3}, \frac{88}{27})$ .  
 c)  $D : (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (1, \infty), C : (-\frac{5}{3}, 1)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, -\frac{1}{3}), Con_{abajo} : (-\frac{1}{3}, \infty)$ .  
 e)  $D(0, -5), E(-\sqrt{5}, 0), F(-1, 0), G(\sqrt{5}, 0)$ .

17)



- a)  $m_{abs} : A(0, 0)$ .  
 b) No tiene punto de inflexión.  
 c)  $D : (-\infty, 0), C : (0, \infty)$ .  
 d) No tiene concavidad.  
 e)  $B(0, 0), C(0, 0)$ .

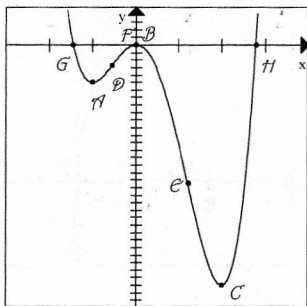
18)



- a)  $m_{abs} : A(-1, 0), C(1, 0), M_{rel} : B(0, 1)$ .  
 b)  $P.I. : D(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}), E(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9})$ .  
 c)  $D : (-\infty, -1) \cup (0, 1), C : (-1, 0) \cup (0, \infty)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty), Con_{abajo} : (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ .  
 e)  $F(0, 1), G(-1, 0), H(1, 0)$ .



19)



a)  $m_{rel} : A(-1, -5), M_{rel} : B(0, 0), m_{abs} : C(1, -32).$

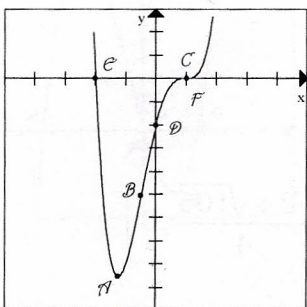
b)  $P.I. : D\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-284+80\sqrt{7}}{27}\right); E\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{-284-80\sqrt{7}}{27}\right).$

c)  $D : (-\infty, -1) \cup (0, 1), C : (-1, 0) \cup (0, \infty).$

d)  $Con_{arriba} : \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right), Con_{abajo} : \left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right).$

e)  $F(0, 0), G\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{3}, 0\right), H(0, 0), I\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{3}, 0\right).$

20)



a)  $m_{abs} : A\left(-\frac{5}{4}, -\frac{2187}{256}\right).$

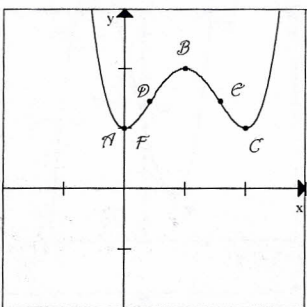
b)  $P.I. : B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{81}{16}\right); C(1, 0).$

c)  $D : \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right), C : \left(-\frac{5}{4}, \infty\right).$

d)  $Con_{arriba} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty), Con_{abajo} : \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$

e)  $D(0, -2), E(-2, 0), F(1, 0).$

21)



a)  $m_{abs} : A(0, 1); C(2, 1), M_{rel} : B(1, 2).$

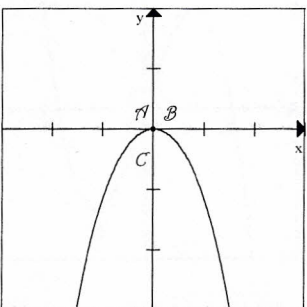
b)  $P.I. : D\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{13}{9}\right); E\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{13}{9}\right).$

c)  $D : (-\infty, 0) \cup (1, 2), C : (0, 1) \cup (2, \infty).$

d)  $Con_{arriba} : \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right), Con_{abajo} : \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$

e)  $F(0, 1).$

22)



a)  $M_{abs} : A(0, 0).$

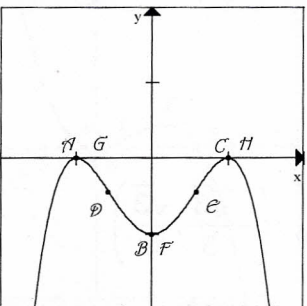
b) *No tiene punto de inflexión.*

c)  $C : (-\infty, 0), D : (0, \infty).$

d) *Es cóncava negativa en su dominio.*

e)  $B(0, 0), C(0, 0).$

23)



a)  $M_{abs} : A(-1, 0); C(1, 0), m_{rel} : B(0, -1).$

b)  $P.I. : D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{9}\right); E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{9}\right).$

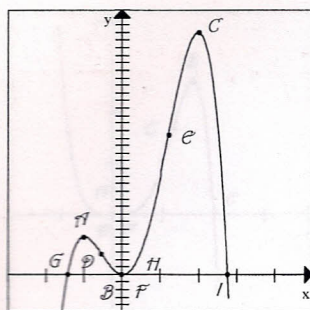
c)  $C : (-\infty, -1) \cup (0, 1), D : (-1, 0) \cup (0, \infty).$

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right), Con_{arriba} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

e)  $F(0, -1), G(-1, 0), H(1, 0).$



24)



a)  $M_{rel} : A(-1,5), m_{rel} : B(0,0), M_{abs} : C(2,32)$ .

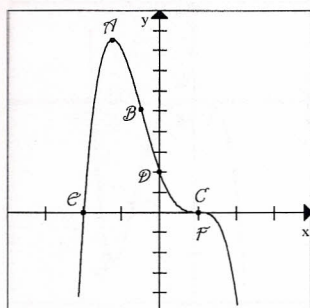
b) P.I.:  $D\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{284-80\sqrt{7}}{27}\right); E\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{284+80\sqrt{7}}{27}\right)$ .

c)  $C : (-\infty, -1) \cup (0, 1), D : (-1, 0) \cup (0, \infty)$ .

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right), Con_{arriba} : \left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$ .

e)  $F(0,0), G\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{3}, 0\right), H(0,0), I\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{3}, 0\right)$ .

25)



a)  $M_{abs} : A\left(-\frac{5}{4}, \frac{2187}{256}\right)$ .

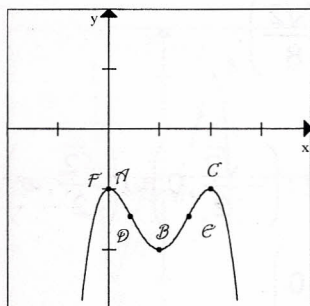
b) P.I.:  $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16}\right); C(1,0)$ .

c)  $C : \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right), D : \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$ .

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty), Con_{arriba} : \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ .

e)  $D(0,2), E(-2,0), F(1,0)$ .

26)



a)  $M_{abs} : A(0,-1); C(2,-1), m_{rel} : B(1,-2)$ .

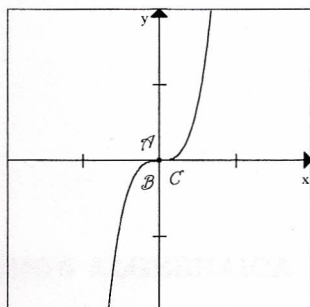
b) P.I.:  $D\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, -\frac{13}{9}\right); E\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, -\frac{13}{9}\right)$ .

c)  $C : (-\infty, 0) \cup (1, 2), D : (0, 1) \cup (2, \infty)$ .

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right), Con_{arriba} : \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ .

e)  $F(0,-1)$ .

27)



a) No tiene máximo ni mínimo.

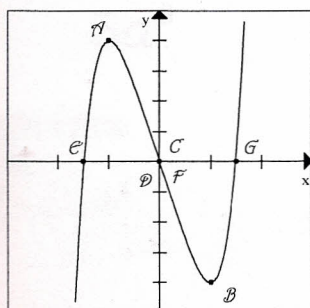
b) P.I.:  $A(0,0)$ .

c)  $C : (-\infty, \infty)$ .

d)  $Con_{abajo} : (-\infty, 0), Con_{arriba} : (0, \infty)$ .

e)  $B(0,0), C(0,0)$ .

28)



a)  $M_{rel} : A(-1,4), m_{rel} : B(1,-4)$ .

b) P.I.:  $C(0,0)$ .

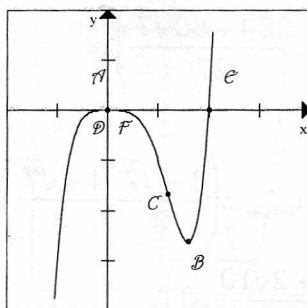
c)  $C : (-\infty, -1) \cup (1, \infty), D : (1, 1)$ .

d)  $Con_{abajo} : (-\infty, 0), Con_{arriba} : (0, \infty)$ .

e)  $D(0,0), E(-\sqrt[4]{5}, 0), F(0,0), G(\sqrt[4]{5}, 0)$ .



29)



a)  $M_{rel} : A(0,0), m_{rel} : B\left(\frac{8}{5}, -\frac{8192}{3125}\right).$

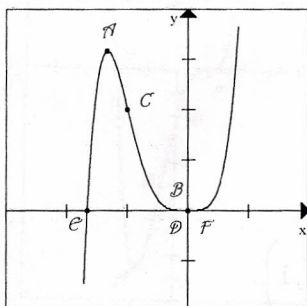
b)  $P.I. : C\left(\frac{6}{5}, -\frac{5184}{3125}\right).$

c)  $C : (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{5}, \infty\right), D : \left(0, \frac{8}{5}\right).$

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, \frac{6}{5}\right), Con_{arriba} : \left(\frac{6}{5}, \infty\right).$

e)  $D(0,0), F(0,0), E(2,0).$

30)



a)  $M_{rel} : A\left(-\frac{4}{3}, \frac{256}{81}\right), m_{rel} : B(0,0).$

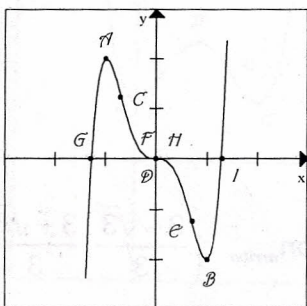
b)  $P.I. : C(-1,2).$

c)  $C : \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty), D : \left(-\frac{4}{3}, 0\right).$

d)  $Con_{abajo} : (-\infty, -1), Con_{arriba} : (-1, \infty).$

e)  $D(0,0), E\left(-\frac{5}{3}, 0\right), F(0,0).$

31)



a)  $M_{rel} : A(-1,2), m_{rel} : B(1,-2).$

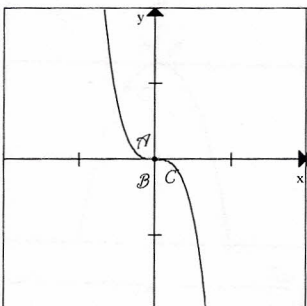
b)  $P.I. : C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right); D(0,0); E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right).$

c)  $C : (-\infty, -1) \cup (1, \infty), D : (-1,1).$

d)  $Con_{abajo} : \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), Con_{arriba} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$

e)  $F(0,0), G\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right), H(0,0), I\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right).$

32)



a) No tiene máximo ni mínimo.

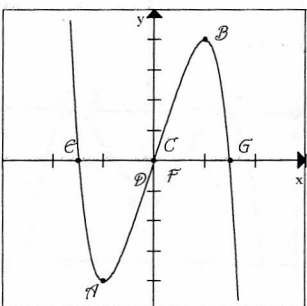
b)  $P.I. : A(0,0).$

c)  $D : (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$

d)  $Con_{arriba} : (-\infty, 0), Con_{abajo} : (0, \infty).$

e)  $B(0,0), C(0,0).$

33)



a)  $m_{rel} : A(-1,-4), M_{rel} : B(1,4).$

b)  $P.I. : C(0,0).$

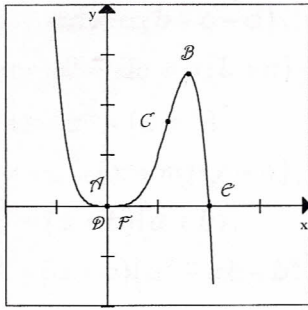
c)  $D : (-\infty, -1) \cup (1, \infty), C : (1,1).$

d)  $Con_{arriba} : (-\infty, 0), Con_{abajo} : (0, \infty).$

e)  $D(0,0), E(-\sqrt[4]{5}, 0), F(0,0), G(\sqrt[4]{5}, 0).$

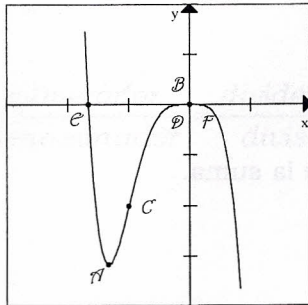


34)



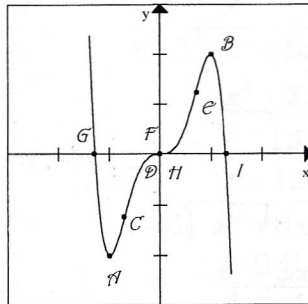
- a)  $m_{rel} : A(0,0), M_{rel} : B\left(\frac{8}{5}, \frac{8192}{3125}\right)$ .  
 b)  $P.I. : C\left(\frac{6}{5}, \frac{5184}{3125}\right)$ .  
 c)  $D : (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{5}, \infty\right), C : \left(0, \frac{8}{5}\right)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : \left(-\infty, \frac{6}{5}\right), Con_{abajo} : \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$ .  
 e)  $D(0,0), F(0,0), E(2,0)$ .

35)



- a)  $m_{rel} : A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{256}{81}\right), M_{rel} : B(0,0)$ .  
 b)  $P.I. : C(-1, -2)$ .  
 c)  $D : \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty), C : \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ .  
 d)  $Con_{arriba} : (-\infty, -1), Con_{abajo} : (-1, \infty)$ .  
 e)  $D(0,0), E\left(-\frac{5}{3}, 0\right), F(0,0)$ .

36)



- a)  $m_{rel} : A(-1, -2), M_{rel} : B(1, 2)$ .  
 b)  $P.I. : C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right); D(0,0); E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$ .  
 c)  $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), C = (-1, 1)$ .  
 d)  $Con_{arriba} = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), Con_{abajo} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ .  
 e)  $F(0,0), G\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right), H(0,0), I\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ .

## PRECALCULO

### ALGEBRA

#### EXPRESION ALGEBRAICA

$$5a^3$$

$a$  es la base.

3 es un exponente.

5 es coeficiente de  $a^3$ ; y también  $a^3$  es coeficiente de 5.

#### COEFICIENTES

$$a + a = 2a$$

$$3b^2 = b^2 + b^2 + b^2$$



**EXPONENTES**

$x^n = \underbrace{xxxxx \cdots x}_n$  ( $x$  se multiplica  $n$  veces por si misma).

$$x^n x^m = x^{n+m}.$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \Rightarrow x^0 = 1; x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x^n = \frac{1}{x^{-n}} \text{ y } \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

$$(x^n)^m = x^{nm}.$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}}; \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

$$(xy)^n = x^n y^n; \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}; \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

**PRODUCTOS NOTABLES.**

1)  $a(b+c-d) = ab+ac-ad$  ley distributiva de la multiplicación con respecto de la suma.

$$2) (a-b)(b+a) = a^2 - b^2.$$

$$3) (a \pm b)(b \pm a) = (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$4) (a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$5) (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$6) (x+n)(x+m) = x^2 + bx + c; \text{ donde: } b = m+n \text{ y } c = mn.$$

$$7) (ax+m)(x+n) = ax^2 + bx + c; \text{ donde: } m+an = b; mn = c.$$

$$8) (ax+m)(ax+n) = a^2x^2 + bx + c; \text{ donde: } a(m+n) = b; mn = c.$$

Desarrollo de un binomio a la  $n$ .

$$(a \pm b)^0 = 1$$

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Las potencias de  $a$  descienden, mientras las de  $b$  ascienden.

Los coeficientes se pueden construir con el triángulo de pascal.

Si es diferencia los signos se van alternando empezando con positivo.

**BINOMIO DE NEWTON**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 5 \frac{5-1}{2} a^{5-2}b^2 + 5 \frac{5-1}{2} \frac{5-2}{3} a^{5-3}b^3 + 5 \frac{5-1}{2} \frac{5-2}{3} \frac{5-3}{4} a^{5-4}b^4 + 5 \frac{5-1}{2} \frac{5-2}{3} \frac{5-3}{4} \frac{5-4}{5} a^{5-5}b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & \square & \square & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & \square & \square & \square & \square & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$



**FACTORIZACIONES**

- a)  $ab + ac - ad = a(b + c - d)$ .  
 b)  $ab + ac - db - dc = a(b + c) - d(b + c) = (a - d)(b + c)$ .  
 c)  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ .  
 d)  $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ ; donde:  $m + n = b$  y  $mn = c$ .  
 e)  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .  
 f)  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ .

**DIVISIÓN**

El procedimiento para realizar una división, es el mismo que para una división numérica:

$$\frac{784}{25} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = \frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 25 \overline{) 784} \\ \underline{-75} \phantom{0} \\ 34 \\ \underline{-25} \\ 9 \end{array}$$

El resultado se escribe

$$\frac{784}{25} = 31 + \frac{9}{25}$$

Con expresiones algebraicas se procede exactamente igual, por ejemplo:

$\frac{x^2 + 8x - 3}{x - 5}$ , antes de iniciar, verificar que las potencias estén ordenadas en orden descendente.

$$\begin{array}{r} x \\ x-5 \overline{) x^2 + 8x - 3} \\ \underline{-x^2 + 5x} \phantom{-3} \\ 13x \phantom{-3} \\ x+13 \\ x-5 \overline{) x^2 + 8x - 3} \\ \underline{-x^2 + 5x} \phantom{-3} \\ 13x - 3 \\ \underline{-13x + 65} \\ 62 \end{array}$$

Primer paso  $\frac{x^2}{x} = x$ , ahora se multiplica  $x$  por el divisor  $x - 5$ , y se resta.

Segundo paso  $\frac{13x}{x} = 13$ , ahora se multiplica  $x$  por el divisor  $x - 5$ , y se resta.

$$\text{Resultado: } \frac{x^2 + 8x - 3}{x - 5} = x + 13 + \frac{62}{x - 5}$$

**ECUACIONES**

Ejemplo 1: Ecuación de primer grado.

$$\begin{array}{r} 3x - 7x + 4 = -(x - 8) \\ -4x + 4 = 8 - x \\ -4x + x + 4 - 4 = 8 - x + x - 4 \\ -3x = 4 \\ \frac{-3x}{-3} = \frac{4}{-3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{array}$$

Ejemplo 2: Ecuación de primer grado con denominadores constantes:

$$\begin{array}{r} \frac{3x}{2} + 5 = 1 - \frac{4 - x}{3} \\ 2(3) \left[ \frac{3x}{2} + 5 \right] = \left[ 1 - \frac{4 - x}{3} \right] 2(3) \\ 9x + 30 = 6 - 8 + 2x \\ 7x + 30 = -2 \\ 7x = -32 \\ x = -\frac{32}{7} \end{array}$$



Ejemplo 3: Ecuaciones de primer grado con denominadores variables. Restricciones:  $x \neq 4, 3$

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-4} &= \frac{2}{x-3} + \frac{8}{x^2-7x+12} \\ \frac{3}{x-4} &= \frac{2}{x-3} + \frac{8}{(x-4)(x-3)} \\ (x-4)(x-3) \left[ \frac{3}{x-4} \right] &= \left[ \frac{2}{x-3} + \frac{8}{(x-4)(x-3)} \right] (x-4)(x-3) \\ 3(x-3) &= 2(x-4) + 8 \\ 3x-9 &= 2x-8+8 \\ x-9 &= 0 \\ x &= 9\end{aligned}$$

Cabe hacer notar que la estrategia de multiplicar toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, para hacer la una ecuación entera, se puede utilizar para cualquier tipo de ecuación que contenga denominadores.

Ejemplo 4:

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ m + n &= b \\ -1 - 4 &= -5 \\ (x-4)(x-1) &= 0 \\ x_1 - 4 = 0 &\Rightarrow x_1 = 4\end{aligned}$$

Esta ecuación tiene coeficiente de  $x^2$  igual a 1, al resolver por factorización, utilizando el caso *d*) de factorización.

$$\begin{aligned}mn &= c \\ (-1)(-4) &= 5\end{aligned}$$

$$x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

Ejemplo 5:

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 15 &= 0 \\ x^2 - \frac{x}{2} - \frac{15}{2} &= 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} = \frac{15}{2} \\ x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{15}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{121}{16} \\ \left|x - \frac{1}{4}\right| &= \frac{11}{4} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{11}{4} \\ x_1 - \frac{1}{4} &= -\frac{11}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Se procede por el método de *completar trinomio cuadrado perfecto*, iniciando por dividir la ecuación entre 2, que es el coeficiente de  $x^2$ . Ahora se completa el trinomio cuadrado perfecto, añadiendo la mitad del coeficiente del termino de primer grado al cuadrado, en ambos miembros

El primer término se factoriza y en el segundo se realizan las operaciones.

Ahora para despejar a  $x$ , obtenemos raíz cuadrada, aplicándola a ambos miembros de la igualdad.

$$x_2 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{12}{4} \Rightarrow x_2 = 3$$

Ejemplo 6: Se resolverá la misma ecuación, pero por factorización, empleando de forma similar el caso *b*) y *d*) de factorización:

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 15 &= 0 \\ ac &= 2(-15) = -30 \\ -30 &= -6(5) \\ -1 &= -6 + 5 \\ 2x^2 - 6x + 5x - 15 &= 0 \\ 2x(x-3) + 5(x-3) &= 0 \\ (2x+5)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

$$2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$$

Encontramos dos números que al multiplicarse resulte  $ac$ . Y sumados  $b = -1$ .

Con estos números, se descompone el termino de primer grado en dos:

Ahora se obtiene factor común a cada par de términos.

Y nuevamente se obtiene factor común (el paréntesis)

$$x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$



Segundo procedimiento:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$\frac{2}{2}(2x^2 - x - 15 = 0)$$

$$\frac{4x^2 - x(2) - 30}{2} = 0$$

$$b = m + n \Rightarrow -1 = -6 + 5$$

$$\frac{(2x-6)(2x+5)}{2} = 0$$

$$\frac{2(x-3)(2x+5)}{2} = 0 \Rightarrow (2x+5)(x-3) = 0$$

$$2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -5 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

Se puede observar que ambos valores coinciden con los obtenidos con el método del ejemplo 4.

También sabemos que las ecuaciones de segundo grado, se pueden resolver con la fórmula general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los coeficientes de la ecuación tomando en cuenta el signo que contengan en ese momento. El doble signo de la raíz nos proporciona los dos valores de las soluciones.

Ejemplo 6:

$$x^3 + 4x^2 - 12x = 0$$

$$x(x^2 + 4x - 12) = 0$$

$$x(x+6)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

Esta ecuación es cúbica, pero observamos que todos los términos tienen el factor común  $x$ , entonces, factorizando: Y la cuadrática que resulta dentro del paréntesis, es factorizable por algunos de los métodos ensayados.

$$x_2 + 6 = 0$$

$$x_2 = -6$$

$$x - 2 = 0$$

$$x_3 = 2$$

## DESIGUALDADES

Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , se dice que  $a > b$ , si en la recta real,  $a$  está situado a la derecha de  $b$ .

### PROPIEDADES DE UNA DESIGUALDAD

i) Al sumar (o restar) cantidades iguales en ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad se conserva el orden. Ejemplo:

$$12 > 7$$

Si se suma 2 a cada lado, en el resultado, el lado izquierdo sigue siendo mayor que el lado derecho por lo que la desigualdad se conserva:

$$12 + 2 > 7 + 2$$

$$14 > 9$$

ii) Al multiplicar (o dividir) ambos miembros de la desigualdad por la misma cantidad (positiva) la desigualdad se conserva, si es negativa, se invierte el orden. Ejemplos:

$$12 > 7$$

$$12(3) > 7(3)$$

$$36 > 21$$

Si se multiplica por 3 la desigualdad se conserva, porque el lado izquierdo sigue siendo mayor al lado derecho.

$$12 > 7$$

$$12(-3) > 7(-3)$$

$$-36 < -21$$

Si se multiplica por -3 la desigualdad se invierte, porque el lado derecho ahora es mayor al lado izquierdo.



Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales:

Exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero. *Propiedad de tricotomía del orden.*

$$a < b; a = b; a > b$$

*Propiedad transitiva del orden*

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } b > c \Rightarrow a > c$$

*Propiedad de suma.*

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$\text{Si } a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

*Propiedad de resta.*

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

$$\text{Si } a > b \Rightarrow a - c > b - c$$

*Propiedad de multiplicación.*

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

*Propiedad de la división.*

$$\text{Si } a > b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Notación de Intervalos.

Notación de intervalo	Notación de desigualdad	Gráfica de línea	Tipo
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$		Cerrado
$[a, b)$	$a \leq x < b$		Semiabierto
$(a, b]$	$a < x \leq b$		Semiabierto
$(a, b)$	$a < x < b$		Abierto
$[b, \infty)$	$x \geq b$		Cerrado
$(b, \infty)$	$x > b$		Abierto
$(-\infty, a]$	$x \leq a$		Cerrado
$(-\infty, a)$	$x < a$		Abierto

## VALOR ABSOLUTO.

$$|x| = k \begin{cases} x = k & \text{si } x \geq 0 \\ x = -k & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq k \Rightarrow x \leq -k \text{ ó } x \geq k$$

$$|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

## LOGARITMOS

### DEFINICIÓN

$$\log_b N = L \Leftrightarrow b^L = N \text{ con } N > 0, b > 0 \text{ y } b \neq 1.$$

Se lee: el *logaritmo* de base  $b$  del número  $N$  es  $L$ , si y solo si,  $b$  elevado a la  $L$  es igual a  $N$ .

Nótese que el número  $N$  del cual se va calcular el logaritmo, debe ser positivo. Además la base también debe ser positiva y mayor que uno. Ejemplo:

$$\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$



Los sistemas de los logaritmos más utilizados, son los de base 10 o decimales y los de base  $e$  o logaritmos naturales. Es conveniente aclarar que como nomenclatura, las expresiones siguientes donde no se escribe la base, deben entenderse con las bases que se indican:

$$\log A = \log_{10} A$$

$$\ln A = \log_e A$$

#### LEYES DE LOS LOGARITMOS

$$1. \ln 1 = 0$$

$$2. \ln e = 1$$

$$3. \ln e^x = x$$

$$4. e^{\ln x} = x$$

$$5. \ln(PQ) = \ln P + \ln Q$$

$$6. \ln\left(\frac{P}{Q}\right) = \ln P - \ln Q$$

$$7. \ln P^m = m \ln P$$

$$1. \log_b 1 = 0$$

$$2. \log_b b = 1$$

$$3. \log_b b^x = x$$

$$4. b^{\log_b x} = x$$

$$5. \log_b(PQ) = \log_b P + \log_b Q$$

$$6. \log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_b P - \log_b Q$$

$$7. \log_b P^n = n \log_b P$$

Ejemplo 1: Si  $\log_3 81 = x$  ¿Cuánto vale el logaritmo  $x$ ?

Basta llevar la expresión logarítmica dada a su forma exponencial:

$$\log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81$$

Y expresar ambos miembros de la igualdad en forma exponencial tomando en cuenta como referencia la base 3, es decir, 81 se debe poder escribir como  $3^2$ .

$$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow 3^x = 3^4$$

Y si las bases son iguales, entonces comparando los exponentes  $x = 4$ .

Ejemplo 2: Si  $\log_b 32 = 5$  ¿Cuánto vale la base  $b$ ?

$$\log_b 32 = 5 \Rightarrow b^5 = 32$$

De nuevo la expresión logarítmica dada se escribe en forma exponencial, como se obtiene  $b^5$  y la pregunta es  $b$ , se puede obtener una raíz quinta.

$$\sqrt[5]{b^5} = \sqrt[5]{32} \Rightarrow b = 2$$

Ejemplo 3: Dado  $\log_8 x = \frac{1}{3}$ , encontrar el valor de  $x$ .

$$\log_8 x = \frac{1}{3} \Rightarrow 8^{\frac{1}{3}} = x$$

De nuevo la expresión logarítmica dada se escribe en forma exponencial. Y al interpretar el exponente tenemos el valor de  $x$

$$8^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow \sqrt[3]{8} = x \Rightarrow x = 2$$

Ejemplo 4: Desarrollar la expresión  $\ln \sqrt[5]{\frac{(x+3)^7 \sqrt{x-2}}{x^3+4}}$ . Desarrollar significa aplicar las leyes de los logaritmos hasta que cada logaritmo esté aplicado a la expresión más simple posible:

$$\ln \sqrt[5]{\frac{(x+3)^7 \sqrt{x-2}}{x^3+4}} = \ln \left( \frac{(x+3)^7 \sqrt{x-2}}{x^3+4} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \ln \frac{(x+3)^7 \sqrt{x-2}}{x^3+4} =$$

$$\frac{1}{5} \ln \frac{(x+3)^7 \sqrt{x-2}}{x^3+4} = \frac{1}{5} \left[ \ln \left[ (x+3)^7 \sqrt{x-2} \right] - \ln(x^3+4) \right] = \frac{1}{5} \left[ \ln(x+3)^7 + \ln \sqrt{x-2} - \ln(x^3+4) \right] =$$

$$\frac{1}{5} \left[ 7 \ln(x+3) + \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^3+4) \right] = \frac{1}{5} \left[ 7 \ln(x+3) + \frac{1}{2} \ln(x-2) - \ln(x^3+4) \right]$$



Ejemplo 5: Resolver la ecuación:

 $\log_7(x+5) + \log_7(x-1) = 1$  Se aplican leyes de logaritmos, para tener el logaritmo de un solo argumento.

$$\log_7(x+5)(x-1) = 1$$

La notación logarítmica se expresa en notación exponencial usando la definición.

$$\log_b N = L \Leftrightarrow b^L = N$$

$$7^1 = (x+5)(x-1)$$

$$x^2 + 4x - 5 = 7$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x_1 + 6 = 0$$

$$x_2 - 2 = 0$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 2$$

$$\log_7(2+5) + \log_7(2-1) = 1$$

$$\log_7(7) + \log_7(1) = 1$$

$$\log_7(7) + \log_7(1) = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 = 1$$

$$\log_7(-6+5) + \log_7(-6-1) = 1$$

$$\log_7(-1) + \log_7(-7) = 1$$

$$\log_7[(-1)(-7)] = 1$$

$$\log_7[7] = 1$$

$$1 = 1$$

Ejemplo 6: Calcular el valor de  $x$ .

$$8^{2x^2-4} = 64^x$$

$$8^{2x^2-4} = (8^2)^x$$

$$8^{2x^2-4} = 8^{2x}$$

$$2x^2 - 4 = 2x$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1$$

Se expresa al 64 como potencia.

Se aplican leyes de los exponentes.

Al ser las bases iguales, los exponentes también son iguales.

Se iguala la ecuación a cero.

Se divide ambos miembros de la ecuación por 2

Se factoriza

Son los valores que satisfacen a la ecuación

## GEOMETRÍA

### FIGURA GEOMETRICA

Esfera

Cilindro

Cono

Cubo

### VOLUMEN

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = a^3$$

### AREA

$$A = 4\pi r^2$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A = 6a^2$$

### PERIMETRO

$$s = r\theta$$

$$P = 2b + 2a$$

$$P = a + b + c$$

### AREA

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$A = ba$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Sector Circular,  $\theta$  en rad.

Rectángulo.

Triangulo.

## TRIGONOMETRÍA

Teorema de Pitágoras: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

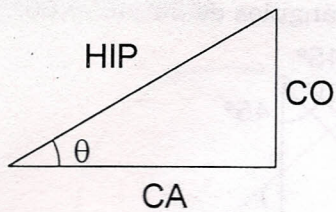
$$(HIP)^2 = (CO)^2 + (CA)^2$$

$$HIP = \sqrt{(CO)^2 + (CA)^2}$$

$$CO = \sqrt{(HIP)^2 - (CA)^2}$$

$$CA = \sqrt{(HIP)^2 - (CO)^2}$$





$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{CO}{HIP} \\ \cos \theta &= \frac{CA}{HIP} \\ \tan \theta &= \frac{CO}{CA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\csc \theta &= \frac{HIP}{CO} \\ \sec \theta &= \frac{HIP}{CA} \\ \cot \theta &= \frac{CA}{CO}\end{aligned}$$

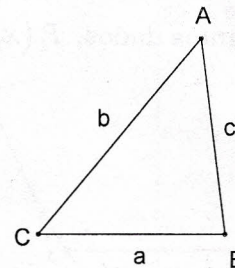
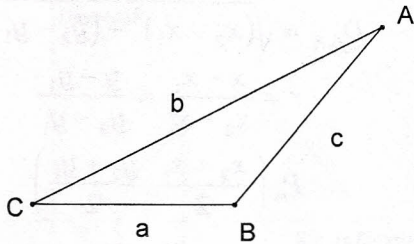
Triángulos oblicuángulos.

Ley de senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ley de cosenos:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$



## IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Fundamentales.

Recíprocas.

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

Producto.

$$\sin \theta \csc \theta = 1$$

$$\cos \theta \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta \cot \theta = 1$$

Cociente.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Pitagóricas.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

Ángulo doble.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

Ángulo mitad.

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

Suma y resta de ángulos.

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

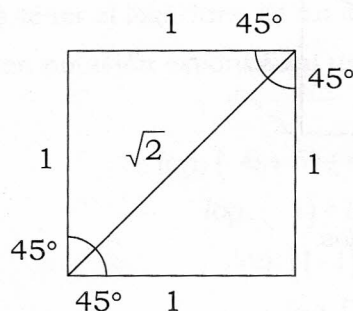
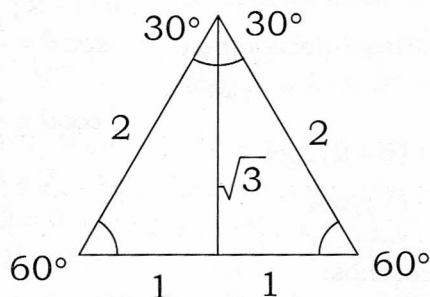
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$



Triángulos para calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .



## GEOMETRIA ANALITICA

### RECTA

Distancia entre dos puntos dados,  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ :

Razón:

Punto medio:

Pendiente entre dos puntos,  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ :

Angulo entre dos rectas, con pendientes conocidas,  $m_1$  y  $m_2$ :

$\alpha$  - Ángulo entre las dos rectas.

$m_1$  - Pendiente de la recta inicial, considerando el giro contrario de las manecillas del reloj.

$m_2$  - pendiente de la recta final.

$$D_{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$P_m \left( \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

### RECTA

Que pasa por dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ :

Forma simétrica con  $a$  - abscisa y  $b$  ordenada ambas al origen,  $I_x(a, 0)$  y  $I_y(0, b)$

Que tiene punto  $P_1(x_1, y_1)$  y pendiente  $m$ :

Forma pendiente  $m$  y  $b$  ordenada al origen,  $I_y(0, b)$

Forma general.

Distancia de un punto  $P(x_1, y_1)$  a la recta  $\ell: Ax + By + C = 0$

Condición de paralelismo y perpendicularidad.

$$m_1 = m_2$$

### AREA DE UN TRIÁNGULO.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix}$$

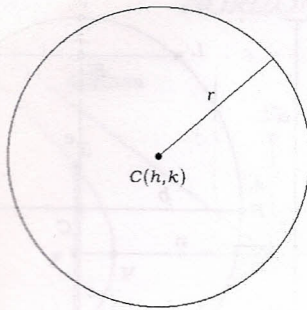
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$b = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$h = \frac{|Ax_3 + By_3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$m_1 m_2 = -1$$



**CIRCUNFERENCIA.**

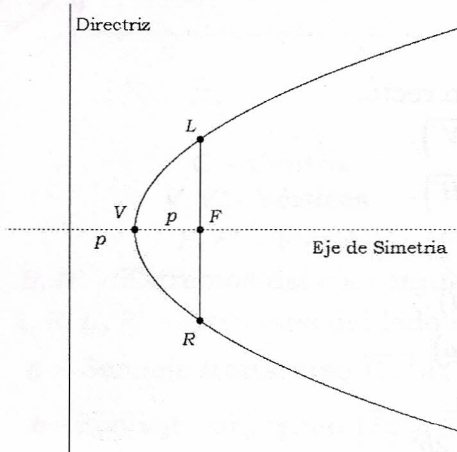
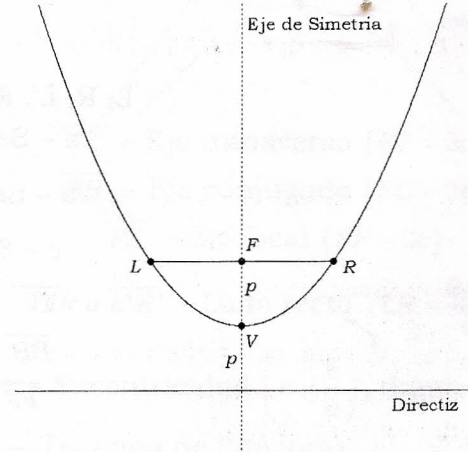
$$C(h, k)$$

$r = \text{radio}$

Ecuación forma ordinaria:  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ .

Ecuación forma general:  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Donde  $A = C$ ;  $A > 0$  y  $C > 0$ .

**PARABOLA.****HORIZONTAL****VERTICAL**

$V$  - vértice.

$F$  - Foco.

$L, R$  - Extremos del lado recto

$\overline{LR}$  - Lado recto ( $LR = 4p$ ).

$p$  - Distancia de vértice a foco ( $D_{VF}$ ) ó distancia de vértice a recta Directriz ( $d_{V|D}$ )

Ecuación forma ordinaria:  $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$       Ecuación forma ordinaria:  $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$

Ecuación forma general:

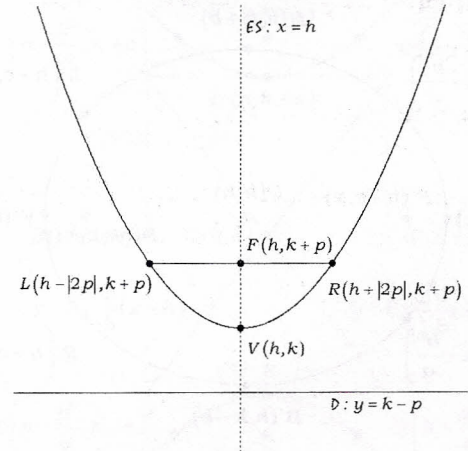
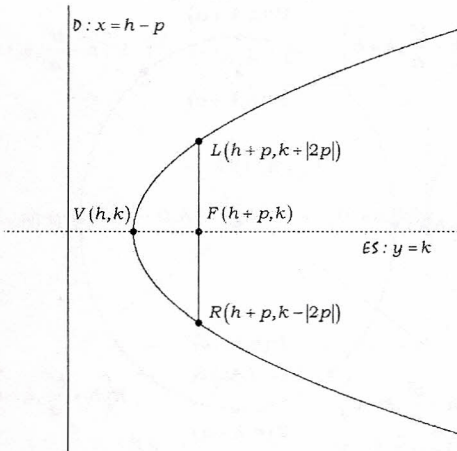
$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde  $A > 0$

Ecuación forma general:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

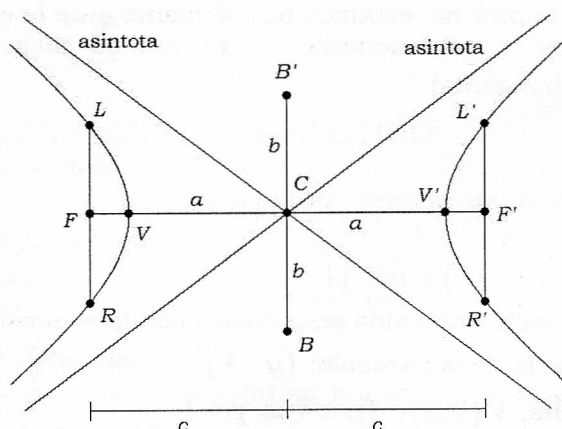
Donde  $C > 0$





## HIPERBOLA.

## HORIZONTAL



$C$  - Centro.  
 $V, V'$  - Vértices.  
 $F, F'$  - Focos.

$B, B'$  - Extremos del eje conjugado.

$L, R, L', R'$  - Extremos del lado recto.

$a$  - Semieje transversal ( $\overline{VC}$  o  $\overline{CV'}$ ).

$b$  - Semieje conjugado ( $\overline{BC}$  o  $\overline{CB'}$ ).

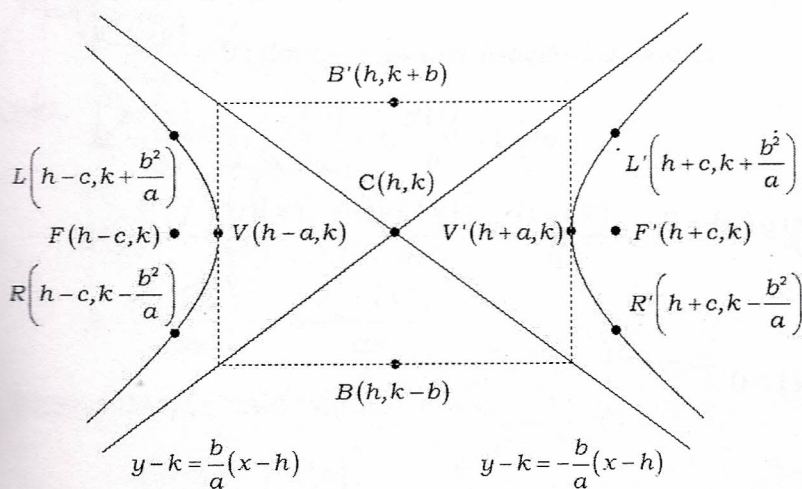
$c$  - Semieje focal ( $\overline{FC}$  o  $\overline{CF'}$ ).

Ecuación forma ordinaria:

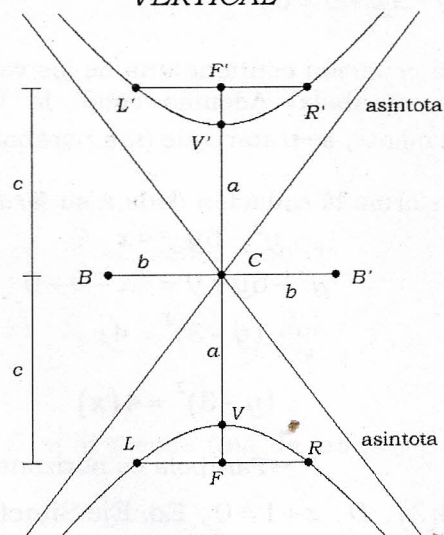
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Asintotas:

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$$



## VERTICAL



$\overline{VV'}$  - Eje transversal ( $ET = 2a$ ).

$\overline{BB'}$  - Eje conjugado ( $EC = 2b$ ).

$\overline{FF'}$  - Eje focal ( $EF = 2c$ ).

$\overline{LR}$  o  $\overline{L'R'}$  - Lado recto ( $LR = \frac{2b^2}{a}$ ).

$e$  - Excentricidad ( $e = \frac{c}{a}$ ), donde  $e > 1$ .

Teorema de Pitágoras:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Ecuación general:  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ;

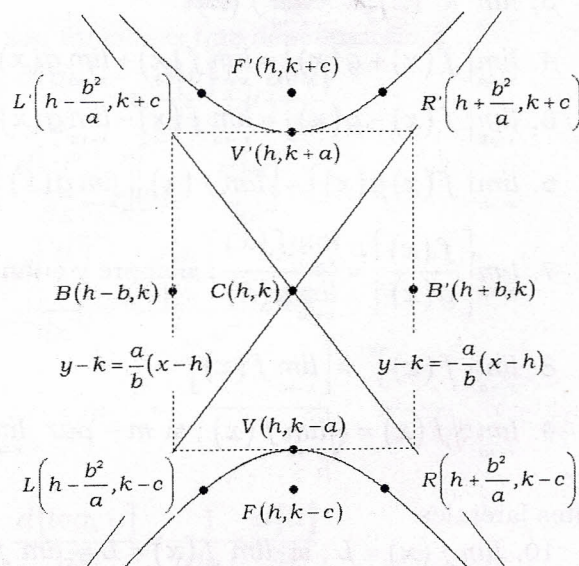
donde  $A > 0$  y  $C < 0$ .

Ecuación forma ordinaria:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Asintotas:

$$y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$$





Ejemplo: Identificar la gráfica representada por la ecuación dada, y encontrar sus elementos principales:  
 $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$ .

Como la ecuación contiene una de las variables al cuadrado y la otra no, estamos posiblemente ante la ecuación de una parábola. Además como la variable cuadrática es  $y$ , de acuerdo a las formas mencionadas anteriormente, se trataría de una parábola con eje de simetría horizontal.

Se transforma la ecuación dada a su forma ordinaria.

$$\begin{aligned} y^2 - 6y &= 4x - 9 \\ y^2 - 6y + 9 &= 4x - 9 + 9 \\ (y - 3)^2 &= 4x \\ (y - 3)^2 &= 4(x) \end{aligned}$$

La ecuación obtenida se compara con la ecuación ordinaria de la parábola:  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ .

Parábola es horizontal(+), abre a la derecha,  $V(0,3)$ ,  $4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(1,3)$ ,  $D: x+1=0$ , Ec. Eje Simetría.:  $y-3=0$ ,  $LR=4$ , Extremos del Lado Recto:  $L(1,5)$  y  $R(1,1)$ .

Notas:

- Al completar el trinomio cuadrado perfecto, se debe agregar la misma cantidad (9) en ambos miembros de la igualdad para cumplir las propiedades de la igualdad.
- Las coordenadas de Vértice  $V(h,k)$ , son tomadas directamente de la ecuación obtenida (con signo contrario).
- Por estar el signo positivo antes de  $p$ , el foco se ubica a la derecha del vértice.
- La directriz resulta ser una recta vertical a la misma distancia del vértice al foco pero ubicado a la izquierda del vértice.

## FORMULARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

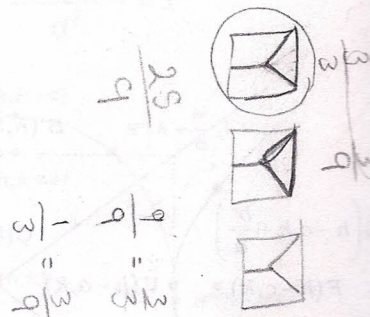
### TEOREMAS DE LÍMITES.

Si  $a$  y  $k$  son números reales,  $m$  y  $n$  son enteros positivos y el límite de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen.

1.  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ; siempre y cuando  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ ; si  $m$  - par  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ .

Límites laterales.

10.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ; si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .





Límites que tiende a infinito.

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

## COMPORTAMIENTO ASÍNTOTICO.

*Asíntota vertical.*

La recta  $x = a$  es una asíntota vertical de la gráfica de la función  $f$  si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero.

$$i) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty.$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

*Asíntota horizontal.*

La recta  $y = L$  es una asíntota horizontal de la gráfica de la función  $f$  si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera.

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \text{ y para algún número } N, \text{ si } x > N, \text{ entonces } f(x) \neq L.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \text{ y para algún número } N, \text{ si } x < N, \text{ entonces } f(x) \neq L.$$

## DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD.

Para funciones de un solo intervalo.

$$1. f(a) \text{ definido.}$$

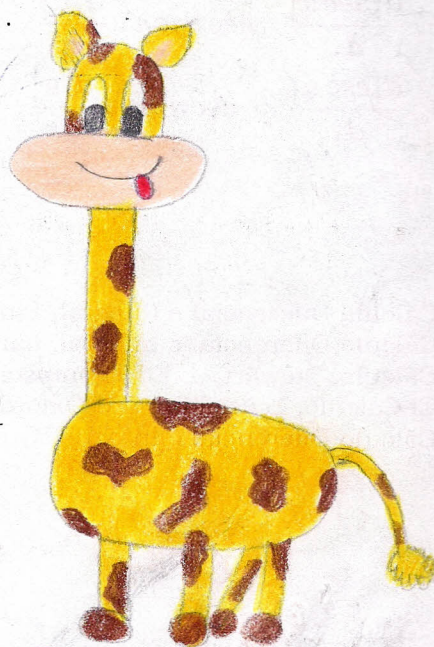
$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

$$3. f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

## DERIVADA POR DEFINICIÓN.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



## FÓRMULAS DE DERIVADAS.

### DERIVADAS ALGEBRAICAS.

$$1. \frac{d[c]}{dx} = 0; \text{ donde } c \text{ es una función constante.}$$

$$2. \frac{d[x]}{dx} = 1; \left( \frac{d[y]}{dy} = 1, \frac{d[t]}{dt} = 1, \text{ etc.} \right).$$

$$3. \frac{d[(f \pm g)(x)]}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} \pm \frac{d[g(x)]}{dx}.$$

$$4. \frac{d[cf(x)]}{dx} = c \frac{d[f(x)]}{dx}.$$

$u$  y  $w$  son funciones que dependen de  $x$ .

$$5. \frac{d[uv]}{dx} = u \frac{d[v]}{dx} + v \frac{d[u]}{dx}.$$

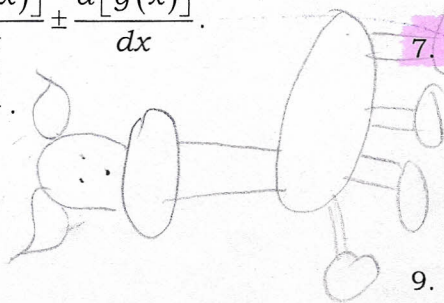
$$6. \frac{d[u^n]}{dx} = n u^{n-1} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$7. \frac{d\left[\frac{u}{v}\right]}{dx} = \frac{v \frac{d[u]}{dx} - u \frac{d[v]}{dx}}{v^2}.$$

### DERIVADAS LOGARÍTMICAS.

$$8. \frac{d[\ln u]}{dx} = \frac{1}{u} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$9. \frac{d[\log_b u]}{dx} = \frac{1}{u \ln b} \frac{d[u]}{dx}.$$





## DERIVADAS EXPONENCIALES.

$$10. \frac{d[e^u]}{dx} = e^u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$11. \frac{d[a^u]}{dx} = a^u \ln a \frac{d[u]}{dx}.$$

## DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS.

$$12. \frac{d[\sin u]}{dx} = \cos u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$13. \frac{d[\cos u]}{dx} = -\sin u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$14. \frac{d[\tan u]}{dx} = \sec^2 u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$15. \frac{d[\cot u]}{dx} = -\csc^2 u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$16. \frac{d[\sec u]}{dx} = \sec u \tan u \frac{d[u]}{dx}.$$

$$17. \frac{d[\csc u]}{dx} = -\csc u \cot u \frac{d[u]}{dx}.$$

## DERIVADAS TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

$$18. \frac{d[\arcsin u]}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$19. \frac{d[\arccos u]}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$20. \frac{d[\arctan u]}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$21. \frac{d[\operatorname{arccot} u]}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$22. \frac{d[\operatorname{arcsec} u]}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d[u]}{dx}.$$

$$23. \frac{d[\operatorname{arccsc} u]}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d[u]}{dx}.$$

## BIBLIOGRAFÍA

- Cálculo Diferencial e Integral, Purcell, E. J., Ed. Limusal
- Cálculo Diferencial e Integral, Larson, H. E., Ed Mc. Graw Hill
- Cálculo, Stewart, J. Ed Thompson.
- El Cálculo, Leithold, L. Ed Oxford.
- Cálculo Diferencial e Integral, Granville, W. A., Ed Limusa